Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uma solução numérica da equação de difusão unidimensional com perturbações singulares nas condições de contorno

C. E. Rubio-Mercedes[1]
Junior R. Ribeiro[2]
Curso de Matemática, UEMS, Dourados – MS
German Lozada-Cruz[3]
IBILCE - Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, UNESP

1 Resumo

Muitos fenômenos da natureza ou da engenharia são modelados por equações diferenciais parciais (ver [1]). Em algumas EDPs aparecem um pequeno parâmetro $\epsilon > 0$, como por exemplo o seguinte problema de valor de contorno

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) = u_t(x,t), & t > 0,\ -1 < x < 1 \\ u(-1,t) = -\epsilon u_x(-1,t) \\ u(1,t) = \epsilon u_x(1,t). \end{cases} \tag{1}$$

As equações do tipo (1) são chamadas de equações de difusão com perturbações singulares nas condições de contorno (ver [3]).

O objetivo principal deste trabalho é estudar numericamente o problema (1) e demonstrar a convergência das soluções para a solução de

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) = u_t(x,t), & t > 0,\ -1 < x < 1 \\ u(-1,t) = 0 = u(1,t) \end{cases} \tag{2}$$

quando $\epsilon \to 0$.

Usaremos a seguinte condição inicial para os problemas (1) e (2):

$$u(x,0) = \cos(0,5\pi x). \tag{3}$$

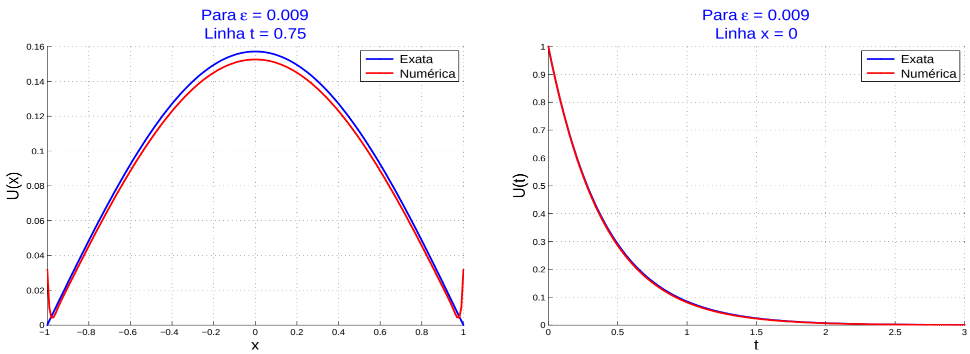
Discretizamos (1) usando o Método de Diferenças Finitas (MDF) (ver [2]) e aplicamos o esquema de Crank-Nicolson para discretizar a coordenada temporal. Obtemos assim a

[1] cosme@uems.br
[2] juniorribeiro_2011@hotmail.com
[3] german@ibilce.unesp.br

matriz de evolução com auxílio de pontos fantasmas nos extremos do domínio espacial $[-1, 1]$ para discretizar as condições de contorno. Essa matriz de evolução é utilizada para calcular a solução numérica com o parâmetro ϵ positivo. A solução exata de (2) é dada por

$$u(x,t) = \exp(-0,25\pi^2 t)\cos(0,5\pi x). \tag{4}$$

Na Figura 1 (a-b) observamos os resultados da solução numérica de (1) e a solução exata de (2). Na Figura 1 (a) graficamos as soluções em função da coordenada espacial x para $t = 0,75$ e $\epsilon = 0,009$ para (1). Na Figura 1 (b) temos o gráfico da solução em função do tempo t para $x = 0$ e $\epsilon = 0,009$ para (1).



(a) Gráfico para $t = 0,75$. (b) Gráfico para $x = 0$.

Figura 1: Convergência da solução numérica para a exata, com $\epsilon = 0,009$.

2 Conclusões

Temos resolvido numericamente o problema dado em (2) usando o MDF. Os resultados numéricos demonstram a convergência das soluções de (1) para a solução exata quando $\epsilon \to 0$, conforme esperado.

Agradecimentos

À parceria CNPq-CAPES pela bolsa PICME.

Referências

[1] R. C. Bassanezi and W. C. F. Júnior. *Equações diferenciais com aplicações*. São Paulo: Editora Harbra Ltda, 1998.

[2] J. A. Cuminato and M. M. Júnior. *Discretização de equações diferenciais parciais: técnicas de diferenças finitas*. [S.l.: s.n.], 2002. Disponível em `http://1drv.ms/1S64m5K`. Acesso em 25/01/2016 às 13:05h.

[3] D. G. de Figueiredo. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

