Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Métodos iterativos baseados em aproximações da pseudo-inversa pelo método de Newton com aplicações na solução estável de problemas discretos mal-postos

Everton Boos[1]
Departamento de Matemática, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, UFSC, Florianópolis, SC
Fermín S. V. Bazán [2]
Departamento de Matemática, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, UFSC, Florianópolis, SC

1 Introdução

Em vários problemas da matemática e das ciências é preciso resolver problemas da forma

$$Ax = b, \qquad \text{ou} \qquad \min \|Ax - b\|_2,$$

em que $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$ e $x \in \mathbb{C}^n$ (vetor de incógnitas). Neste contexto, é sabido que a matriz pseudo-inversa de Moore-Penrose (veja [6]), denotada por $A^\dagger$, generaliza o conceito de matriz inversa e que o vetor $\hat{x} = A^\dagger b$ é solução do problema de mínimos quadrados associado a $Ax = b$, contendo também a característica de possuir norma mínima. Mas, assim como acontece com a matriz inversa, computar a pseudo-inversa nos casos gerais implica em alto custo computacional, o que pode tornar impraticável o seu cálculo.

Para contornar as dificuldades apontadas acima, partimos para métodos iterativos para aproximar a pseudo-inversa, mas tendo em mente que, ao invés de aproximarmos a própria pseudo-inversa, o principal objetivo é calcular aproximações do efeito dela quando aplicada ao vetor b. Assim, em uma primeira etapa, tendo como base a referência [1], estudamos sequências de matrizes $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de modo que $X_k \longrightarrow A^\dagger$, quando $k \longrightarrow \infty$. Em seguida, a ideia é construir uma sequência de vetores $x^{(k)} \in \mathbb{C}^n$, baseada na sequência X_k, e analisar sob quais condições, $x^{(k)} \longrightarrow A^\dagger b$. Particular ênfase é dada ao estudo de uma sequência matricial/vetorial gerada pelo método de Newton.

2 Os Métodos Iterativos

Em geral, utilizamos uma aproximação inicial $X_0 = \beta A^*$, para β satisfazendo certas condições, e uma sequência de matrizes $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ definidas na forma

[1] everton_boos@yahoo.com.br
[2] fermin.bazan@ufsc.br

 © 2017 SBMAC

$$X_{k+1} = X_k + C_k T_k,$$

com C_k e T_k escolhidas de diferentes formas. Basicamente, se forem feitas escolhas corretas para as matrizes C_k e T_k, prova-se que $X_k \longrightarrow A^{\dagger}$, quando $k \longrightarrow \infty$. Obviamente, do ponto de vista computacional, realizam-se apenas uma certa quantidade de iterações até um critério de parada ser satisfeito. Notamos que, a partir da aproximação X_k obtida, uma solução aproximada para o sistema linear ou para o problema de mínimos quadrados é obtida imediatamente através do produto $X_k b$. A outra alternativa é gerar a sequência de vetores

$$x^{(k)} = X_k b \in \mathbb{C}^n,$$

interrompendo o processo através de um critério de parada apropriado. Se A é de grande porte, é evidente que é mais econômico usar a sequência vetorial do que a sequência matricial.

Apresentaremos resultados numéricos obtidos por meio da sequência $x^{(k)}$ na resolução de problemas mal condicionados descritos em [4], com perturbações no vetor de dados b. Como critérios de parada, usamos o princípio da discrepância [5], um critério baseado no uso da curva-L [3] e a regra do produto mínimo [2]. Além disso, estamos trabalhando atualmente em estimativas teóricas para $\|x_k - \hat{x}\|_2$ baseadas no nível de ruído do vetor de dados, a fim de relacionar o nível de perturbação no vetor de dados b com a precisão da solução.

Referências

[1] A. Ben-Israel and T. N. E. Greville. *Generalized Inverses: Theory and Applications.* 2nd. ed. New York: Springer, 2003.

[2] L. S. Borges, F. S. V. Bazán and M. C. Cunha. Automatic stopping rule for iterative methods in discrete ill-posed problems, *Comp. Appl. Math.*, 2014. DOI: 10.1007/s40314-014-0174-3.

[3] P. C. Hansen. Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve, *SIAM Rev.*, 34: 561–580, 1992.

[4] P. C. Hansen. Regularization Tools: A MATLAB package for analysis and solution of discrete ill-posed problems, *Numerical Algorithms*, 6:1–35, 1994.

[5] V. A. Morozov. On the solution of functional equations by the method of regularization, *Soviet Math. Dokl.*, 7:414–417, 1966.

[6] R. Penrose. A generalized inverse for matrices, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 51:406–413, 1955.

© 2017 SBMAC