Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Uma análise teórico-prática da discretização de um problema de advecção com termo fonte

Débora O. Medeiros[1]
posMAC-Faculdade de Ciências e Tecnologia, FCT/UNESP-PP
Messias Meneguette Jr[2]
Faculdade de Ciências e Tecnologia, FCT/UNESP-PP

1 Introdução

Recentemente foram estudados aspectos importantes do tratamento numérico, incluindo comparações com a solução exata, de uma equação de advecção com termo fonte [3]. Nossa análise mostra que a simulação convencional para a solução $T(x,t)$ que é feita evoluindo em t precisa ser melhorada, devendo considerar também uma evolução em x devido à condição inicial $T(0,t) = 1$ para $t \geq 0$. Isto impõe uma adequação da condição de estabilidade e convergência de Courant, Friedrichs e Lewys (CFL), vide [1].

Assim, considere o problema de advecção com termo fonte :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} = f(x)T, \tag{1}$$

onde $f(x) = (b(x) - \frac{1}{Wi})$, Wi é o número de Weissenberg e $u > 0$ é a velocidade de convecção. Um fato relevante é que a condição inicial é prescrita como sendo: $T(x,0) = 1$ com $0 \leq x \leq L$ e $T(0,t) = 1$ para $t \geq 0$, pois passa a exigir adequações na condição CFL.

Uma análise analítica utilizando os métodos de diferenças e *upwind* mostra que é preciso impor restrições à variável espacial x e uma condição CFL para a evolução do escoamento em x na Figura 1(b), alterando o espaçamento da malha e o intervalo de tempo utilizado para que seja satisfeita a condição CFL. Este resultado teórico vai ao encontro do que se tinha observado apenas numericamente em [3].

2 Descrição do método

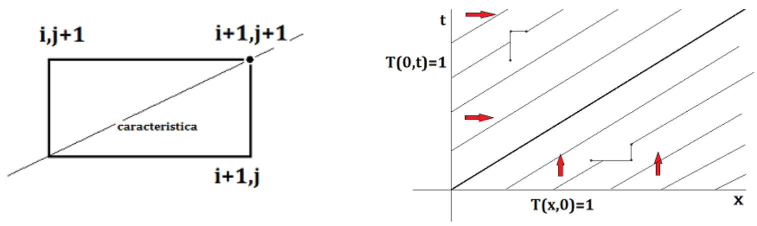
Ao estudar a família de curvas características da equação (1), com velocidade u constante, é preciso considerar o conjunto daquelas que propagam a condição inicial em $x = 0$ (com evolução em t) e, separadamente, o conjunto daquelas que propagam a condição

---

[1]deboraomedeiros@gmail.com
[2]messias@fct.unesp.br

inicial em $t = 0$ (com evolução em x). No caso de advecção sem termo fonte não há influência no crescimento da solução e, portanto, a evolução é feita somente em t. Quando há crescimento da solução devido ao termo fonte, a propagação da condição inicial em $t = 0$ impõe um "*upwind*"para a variável x e a análise da correspondente condição CFL.

A condição CFL é estudada para o método *upwind* e o método box [1].



(a) Malha ótima.

(b) Direções de propagação do método *upwind*.

Figura 1: Condição CFL junto a malha e os métodos computacionais.

3 Conclusões

Este trabalho permitiu melhor entender a causa do não crescimento adequado pelo *upwind* convencional utilizando uma malha diferente da ótima e verificar a melhoria advinda da aplicação correta do método obedecendo a condição CFL, uma vez que o uso de malha ótima sugere o uso do método box como forma natural de melhoria numérica.

Ainda, como ilustrado na Figura 1(b) e estudado analiticamente, as curvas características estão de acordo com a condição CFL e por meio da propagação numérica em conformidade com as premissas teóricas, a solução aproximada faz a mimica do crescimento da solução exata, comportamento esperado em problemas como o proposto.

Agradecimentos

À Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP-2015/01243-0).

Referências

[1] J. A. Cuminato and M. Meneguette, *Discretização de Equações Diferenciais Parciais: Técnicas de Diferenças Finitas*. SBM, Rio de Janeiro, 2013.

[2] R. Fattal and R. Kupferman, Time-dependent simulation of viscoelastic flows at high Weissenberg number using the log-conformation representation. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 126: 23-37, 2005.

[3] L. A. B. Silva and M. Meneguette, Log-conformation representation of hyperbolic conservation laws with source term. *TEMA*, 15(3): 293-299, 2014.