Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Análise da Convergência do Método dos Gradientes Conjugados com o uso de Pré-condicionadores

Thiago Jordem Pereira[1]
Depto de Ciências Exatas, Biológicas e da Terra, INFES, UFF, Santo Antônio de Pádua, RJ
Melise de Souza Gonçalves[2]
Depto de Ciências Exatas, Biológicas e da Terra, INFES, UFF, Santo Antônio de Pádua, RJ

1 Introdução

A resolução de problemas em diversas áreas relevantes recaem na solução de sistemas lineares de grande porte e esparsos. Desta forma, aproximações devem ser aplicadas de forma a serem resolvidas por algum tipo de método numérico eficiente. Existem diversos métodos numéricos que são utilizados na resolução de sistemas lineares, dentre os quais pode-se destacar método dos Gradientes Conjugados [2,3]. Este eficiente método iterativo foi desenvolvido por [4] e basea-se em um conjunto de direções A-conjugadas linearmente independentes, onde permite uma convergência mais rápida para a solução do sistema linear. Porém, a eficiência do método em relação a sua convergência pode ser comprometida em alguns casos [2,3]. Desta forma, se faz necessário o uso de pré-condicionadores no método dos Gradientes Conjugados para que a convergência possa ser acelerada. Portanto, o objetivo deste trabalho é o de estudar convergência do Método dos Gradientes Conjugados mediante ao uso de diversos tipos de dos Pré-condicionadores: Jacobi [5], Symmetric Sucessive Overrelaxatin (SSOR) [3] e Decomposição Incompleta de Cholesky [1,5].

2 Método dos Gradientes Conjugados

O método dos Gradientes Conjugados é um eficiente método iterativo utilizado para resolver sistemas de equações lineares do tipo [2,3]

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{1}$$

onde $\mathbf{A}$ é a matriz dos coeficientes, $\mathbf{x}$ é o vetor que contém as variáveis e $\mathbf{b}$ é um vetor constante. Para a utilização deste método é necessário que a matriz dos coeficientes $\mathbf{A}$ seja simétrica ($\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$), definida positiva ($\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$). A ideia básica do método dos Gradientes Conjugados é encontrar o valor de $\mathbf{x}$ que minimiza o funcional [3]

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}^T\mathbf{x}. \tag{2}$$

[1]tjordem@gmail.com
[2]melisesg7@gmail.com

Sabe-se que o ponto de mínimo $\mathbf{x}^*$ da função $F(\mathbf{x})$ é aquele que anula o gradiente de F, isto é,

$$\nabla F(\mathbf{x}^*) = \mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{b} = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Desta forma, tem-se que $\nabla F(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ é equivalente a obter-se a solução do sistema linear (1). Para uma revisão detalhada deste método recomenda-se os trabalhos de [2, 3].

A eficiência do método dos Gradientes Conjugados pode ser comprometida quando o mesmo é aplicado a um sistema linear cuja matriz dos coeficientes $\mathbf{A}$ é mal-condicionada [3]. Neste caso, será necessário um grande número de iterações para que o método convirja para a solução do problema. Entretanto, pode-se utilizar um pré-condicionador da matriz $\mathbf{A}$ a fim de acelerar a convergência do método, onde o sistema de equações lineares (1) é transformado em um sistema equivalente do tipo [3]:

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b}, \tag{4}$$

onde $\mathbf{P}$ é a matriz pré-condicionadora. O sistema (4) possui propriedades mais favoráveis à convergência do método. Existem diversas forma de pré-condicionamento da matriz $\mathbf{A}$, dentre as quais pode-se destacar o de Jacobi [5], Symmetric Sucessive Overrelaxatin (SSOR) [3] e Decomposição Incompleta de Cholesky [1, 5].

3 Conclusões

Neste trabalho, foi estudada a convergência do Método dos Gradientes Conjugados mediante ao uso dos Pré-condicionadores: Jacobi, Symmetric Sucessive Overrelaxatin (SSOR) e Decomposição Incompleta de Cholesky. Foram realizados diversos estudos numéricos comparativos, onde considerou-se sistemas lineares resultantes de problemas do método de diferenças finitas. Neste estudos foram analisadas o número de iterações necessárias para que a convergência possa ser atingida, o erro de aproximação e a eficiência computacional. Os resultados numéricos obtidos indicam que o tipo de pré-condicionamento utilizado no método dos Gradientes Conjugados pode trazer diversas vantagens quanto a eficiência na resolução de sistemas de equações algébricas lineares.

Referências

[1] V. S. Almeida, and J. B Paiva. Aplicação do método dos gradientes conjugados com o uso de pré-condicionadores em problemas do MEF. *Comp. Meth. in Eng.*, 1999.

[2] R. L. Burden, and J. D. Faires. *Análise Numérica.* P. T. Learning, São Paulo, 2003.

[3] M. C. C. Cunha. *Métodos Numéricos.* Editora da UNICAMP, Campinas, 2000.

[4] R. M. Hestenes, and E. Stiefel. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *J. Research Nat. Bur. Standarts.*, 49: 409-436, 1952.

[5] H. V. Thibes, Um estudo da fatoração incompleta LU e Cholesky como pré-condicionadores nos métodos iterativos, Dissertação de Mestrado, UFRGS, 2002.