

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

---

# Método dos Gradientes Conjugados Aplicado a Sistemas Lineares

Saulo Vitor Pinheiro Cantanhêde<sup>1</sup>

Departamento de Eletroeletrônica, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão, IFMA, São Luís, MA

Orlando Donato Rocha Filho<sup>2</sup>

Departamento de Eletroeletrônica, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão, IFMA, São Luís, MA

## 1 Introdução

Atualmente, com a presença de problemas que requerem a solução numérica de equações diferenciais de dimensões cada vez mais elevadas, faz-se necessário o uso de métodos numéricos cada vez mais rápidos para sua resolução. A maioria desses métodos resulta em sistemas lineares de dimensões elevadas, o que impede o uso de métodos diretos, tais como a Eliminação Gaussiana, logo a solução que se mostra capaz de atender a essa necessidade é a utilização de métodos iterativos que sejam capazes de gerar boas aproximações da solução rapidamente.

No estudo e busca por solução de sistemas lineares de dimensão elevada, faz-se necessário o uso de métodos alternativos ao de inversão de matrizes ou à Eliminação Gaussiana. É nesse contexto que se utiliza a otimização para obter tal solução. É proposta uma função a ser otimizada por um algoritmo, de forma que o mínimo dessa função seja a solução para o sistema linear encontrado. Dentre os métodos iterativos, será utilizado o Método de Gradientes Conjugados(CG) que foi desenvolvido por Hestenes e Stiefel em 1952. Trata-se de uma técnica numérica para otimização que pode ser aplicada para a resolução de sistemas lineares.

## 2 Formulação do Algoritmo do Método de Gradientes Conjugados

Pode-se considerar o caso de um sistema do tipo

$$Ax = b \tag{1}$$

---

<sup>1</sup>saulocantanhede30@hotmail.com

<sup>2</sup>orlando.rocha@ifma.edu.br

sendo  $A \in R^{n \times n}$ , simétrica e definida positiva e  $b \in R^n$ .

O CG então realiza um determinado número de cálculos ou iterações, para ser capaz de gerar aproximações para o  $x$  dado na equação (1). Buscando encontrar um valor final com maior precisão possível para a solução do problema, para isso utiliza os conceitos de ortogonalização e conjugação, gerando um processo em que a cada iteração de CG resultará em uma nova direção criada pela combinação linear do resíduo corrente da direção anterior, dadas por vetores ortogonais à matriz, podendo ser chamadas de A-conjugadas, pois são uma versão conjugada dos sucessivos gradientes encontrados durante a busca pela solução. As equações que regem o comportamento descrito anteriormente, assim como a estrutura geral do algoritmo CG são apresentadas a seguir.

---

Algoritmo do Gradiente Conjugado

---

```

1: Escolhe-se  $x_0 \in R^n$ 
2:  $r_0 = Ax_0 - b$ 
3:  $d_0 = r_0$ 
4:  $k=0$ 
5: while  $d_k \neq 0$  do
6:    $\alpha_k = -r_k^T d_l / (d_k^T A d_k)$ 
7:    $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ 
8:    $r_{k+1} = Ax_{k+1} - b$ 
9:    $\beta_k = -r_{k+1}^T A d_k / (d_k^T A d_k)$ 
10:   $d_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k d_k$ 
11:   $k \leftarrow k + 1$ 
12: end while

```

---

### 3 Conclusões

Por meio da metodologia proposta e dos resultados encontrados, é possível concluir que o Método de Gradientes Conjugados trata-se de uma ferramenta eficaz em diversos campos na engenharia, ao se apresentar mais rápida na comparação com métodos diretos, como o de Newton, além de também se estender para resolução de sistemas não-lineares.

### Referências

- [1] M. R. Hestenes, E. Stiefel. Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems, Journal of Research of the Natural Bureau of Standards, v. 49, n. 6, dez. 1952.
- [2] A. Patrascu; I. Necoara; R. Findeisen, Rate of convergence analysis of a dual fast gradient method for general convex optimization. Decision and Control (CDC), 2015 IEEE 54th Annual Conference on , vol., no., pp.3311-3316, 15-18 Dec. 2015. DOI: 10.1109/CDC.2015.7402717
- [3] J.R. Shewchuk, An Introduction to the Conjugate Gradient Method Without the Agonizing Pain, Edition 1 1/4, August 4, 1994.