Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Transformações Lineares e Cadeias de Markov Usando o SageMath

Tiarles Guterres[1]
Engenharia de Computação, Centro de Tecnologia, UFSM, Santa Maria, RS
Alice Kozakevicius[2]
Laboratório de Análise Numérica, Centro de Ciências Naturais e Exatas, UFSM, Santa Maria, RS

1 Introdução

Exemplos de cadeias de Markov são, em geral, apresentados brevemente durante a disciplina de Álgebra Linear para exemplificar tipos especiais de matrizes, por exemplo matrizes de probabilidade de transição (ou estocásticas), cujos valores são todos não negativos e cuja soma dos elementos de cada coluna é igual a 1. No entanto, a ligação entre este tipo de matriz com os demais tópicos de Álgebra Linear não é praticamente explorada, pelo menos, não em textos consagrados para cursos de graduação, como [1].

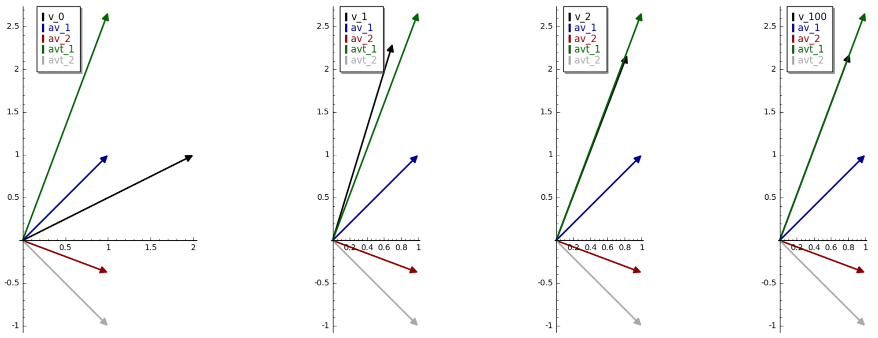
Este trabalho traz como proposta principal, o estudo de tópicos básicos, porém relevantes de Álgebra Linear como transformações lineares, autovalores e diagonalização de operadores, através da construção de exemplos de transformações lineares cujas matrizes associadas são matrizes estocásticas. Como ferramenta computacional para construção e estudo destes exemplos, utiliza-se o SageMath [2], que é uma plataforma de computação em nuvem projetada para matemática computacional.

2 Matrizes de Markov e Transformações Lineares

As matrizes estocásticas $[A]_{n\times n}$, associadas a cadeias de Markov [3], são interessantes pois: (i) $[A] = [a_{i,j}]$, $a_{i,j} \geq 0$, (ii) para cada coluna j, $\sum_{k=1}^{n} a_{k,j} = 1$. Assim, pode-se definir uma transformação linear $S : V \to W$, cuja matriz associada $[A]$ seja estocástica. Pode-se, então, obter para qualquer vetor $\vec{v} \in V$ sua imagem $\vec{w} = S(\vec{v}) \in W$ através da formulação matricial para S. Assumindo que $[\vec{v}]$ e $[\vec{w}]$ denotam as coordenadas de $\vec{v}$ e $\vec{w}$ nas respectivas bases de V e W, tem-se $[A][\vec{v}] = [\vec{w}]$. A partir da transformação S, pode-se construir as transformações compostas $S^2 = S \circ S$, $S^3 = S \circ S \circ S$, $S^4 = S \circ S \circ S \circ S$, e assim sucessivamente, sendo que cada uma dessas transformações compostas possuem representações matriciais dadas pelas respectivas potências da matriz $[A]$: a saber $[A]^2$, $[A]^3$, $[A]^4$,... Assim, uma pergunta interessante é: dado um vetor inicial $\vec{v_0}$, o que

[1]tiarlesmoralles@hotmail.com
[2]alice.kozakevicius@gmail.com

acontece com os vetores $\vec{v_k} = S^k(\vec{v_0})$, ou seja $[\vec{v_k}] = [A]^k[\vec{v_0}]$? Estas imagens terão algum comportamento padrão? Irão convergir para alguma posição (direção) em especial? A partir de exemplos no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ pretende-se dar uma ideia intuitiva para estas questões. Na Figura 1, apresentam-se diferentes iterações a partir de $\vec{v_0} = (2, 1)$, sendo a matriz de Markov $[A]$ com colunas 1 e 2 são dadas por $(0.2, 0.8)$ e $(0.3, 0.7)$, respectivamente.



(a) $\vec{v_0} = (2, 1)$ (b) $\vec{v_1} = (0.7, 2.3)$ (c) $\vec{v_2} = (0.83, 2.17)$ (d) $\vec{v_{100}} \approx (0.81, 2.18)$

Figura 1: (a) $\vec{v}_0$ vetor inicial, $\vec{av}_1$ e $\vec{av}_2$ autovetores de $[A]$, $\vec{avt}_1$ e $\vec{avt}_2$ autovetores de $[A]'$ (matriz transposta); (b)$\vec{v}_1 = [A]\,\vec{v}_0$; (c)$\vec{v}_2 = [A]^2\,\vec{v}_0$; (d)$\vec{v}_{100} = [A]^{100}\,\vec{v}_0$.

Na verdade, para se responder a questão da dinâmica dos vetores $\vec{v_k}$, com $k \to \infty$, antes é preciso que sejam conhecidos os autovalores e autovetores da matriz de Markov $[A]$. Alguns fatos interessantes e que podem ser explorados através do SageMath são:
(1) Se $[A]$ é uma matriz de Markov, sua transposta $[A]'$ também é;
(2) O número 1 é sempre autovalor de $[A]$;
(3) $[A]$ e $[A]'$ têm os mesmos autovalores;
(4) O vetor $\vec{\mathbf{1}}$ (todas as suas coordenadas são iguais a 1) é sempre um autovetor de $[A]'$.

Além de ilustrar propriedades de autovalores e autovetores de matrizes de Markov, investigam-se com o SageMath formas quadráticas Q [1], cujas matrizes associadas $[Q]$ são também matrizes de Markov, assim como equações no formato abaixo:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} [QA^i] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = r^2,\ r \in \mathbb{R} \text{ e } A^i \text{ é i-ésima potência de A.} \tag{1}$$

Referências

[1] J. L. Boldrini, S. I. R. Costa, V. R. Ribeiro, and H. G. Wetzler. *Álgebra Linear e Aplicações*. Harper-Row, São Paulo, 1987.

[2] Sagemath. *Códigos em Python e linguagem R. Site: https://cloud.sagemath.com/*

[3] W. G. Strang. Lecture 24: Markov chains; fourier series (MIT). Site: http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-06-linear-algebra-spring-2010/video-lectures/lecture-24-markov-matrices-fourier-series/

