

Um Estudo de Métodos de Galerkin Descontínuos de Alta Ordem para Problemas Hiperbólicos

Felipe Augusto Guedes da Silva¹

Eduardo Cardoso de Abreu²

Maicon Ribeiro Correa³

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, Campinas, SP

Resumo. Neste trabalho apresentaremos o estudo computacional de métodos de Galerkin Descontínuos para aproximação numérica de leis de conservação de natureza hiperbólica, com enfoque em esquemas explícitos e no uso de aproximações do tipo Runge-Kutta no tempo para aproximação de problemas lineares e não-lineares. Especificamente, serão exploradas as boas propriedades de estabilidade local, no tempo, dos métodos da classe Runge-Kutta em conjunto com funções de fluxo numérico estáveis e com o uso de limitadores de inclinação, com o objetivo de desenvolver métodos de Galerkin Descontínuos de alta ordem capazes de obter boa resolução de gradientes abruptos e de soluções descontínuas, sem oscilações espúrias, em problemas hiperbólicos.

Palavras-chave. Problemas hiperbólicos, Galerkin Descontínuo, Formulação semi-discreta, Runge-Kutta, Esquemas centrais de alta ordem.

1 Método de Galerkin Descontínuo

O método de Galerkin Descontínuo (DG) é uma das classes dos Métodos de Elementos Finitos que usa funções descontínuas por partes para compor os espaços de aproximação. O método DG combina diversas características interessantes do método de elementos finitos clássico e do método de volumes finitos, compondo uma ferramenta importante para aproximar soluções de equações diferenciais [3].

1.1 Lei de Conservação Hiperbólica

Seja $D = \Omega \times I \subset \mathbb{R}^2$, o domínio de definição do problema estudado, onde $\Omega = (a, b)$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, e $I = (0, T)$ com $T > 0$ correspondendo às partes espacial e temporal de D , respectivamente. Sem perda de generalidade, x denotará a variável espacial e t a variável temporal. Considere $u(x, t) : D \rightarrow \mathbb{R}$, a função que designa uma variável

¹felipe.augusto.guedes@gmail.com

²eabreu@ime.unicamp.br

³maicon@ime.unicamp.br

conservada, e a função de fluxo $f(u)$, ambas com imagem em \mathbb{R} . Uma lei de conservação associada a essas funções é uma equação diferencial parcial escrita na forma

$$u_t + f(u)_x = 0. \tag{1}$$

A equação (1) deverá ser acrescida de uma condição inicial e uma condição de contorno (em domínios limitados), definindo assim um problema de valor inicial e de contorno.

1.2 Nomenclatura e Definições para Problemas Discretos

Sejam $\{x_0, x_1, \dots, x_j, \dots, x_{m+1}\}$ uma partição fixa do intervalo Ω , com $j, m \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq m$, tal que $x_0 = a$ e $x_{m+1} = b$, onde m representa o número de nós internos x_j da malha física, e $x_{j+\frac{1}{2}} = (x_{j+1} + x_j) / 2$. Consideramos o subintervalo $C_j = (x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}})$, de comprimento $\Delta x_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$, como sendo a célula primal (elemento primal). Tome uma partição regular do domínio, no sentido de que todas as células C_j possuem o mesmo comprimento Δx . Utilizando o parâmetro $h \equiv \Delta x$ definimos então V_h^k como o conjunto dos polinômios por partes de grau no máximo $k \in \mathbb{N}$ sobre os intervalos $\{C_j\}$, não exigindo continuidade destes polinômios nos pontos da fronteira de cada sub-intervalo

$$V_h^k = \left\{ u : u|_{C_j} \in P^k(C_j), \text{ para } x \in C_j, j = 1, 2, \dots, m \right\}, \tag{2}$$

onde $P^k(C_j)$ é o espaço de polinômios de grau $\leq k$ definidos no subdomínio C_j . Seja também $\hat{f}(u^-, u^+)$ um fluxo numérico monótono, que cresce com o primeiro argumento e decresce com o segundo argumento [3], consistente com o fluxo físico, ou seja, $\hat{f}(u, u) = f(u)$ e que seja Lipschitz contínuo em ambos os argumentos. Para um dado instante de tempo t fixo, $\epsilon > 0$ e dada $u_h \in V_h^k$, arbitrária, definimos os seguintes valores:

$$u_h(x_{j\pm\frac{1}{2}}^\pm, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_h(x_{j\pm\frac{1}{2}} \pm \epsilon, t) \qquad x_{j\pm\frac{1}{2}}^\pm = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} x_{j\pm\frac{1}{2}} \pm \epsilon. \tag{3}$$

1.3 Formulação Fraca Global

Seja V um espaço vetorial formado a princípio por funções suficientemente regulares a fim de garantir os processos de integração e diferenciação. Consideremos uma função teste arbitrária $v \in V$. Multiplicando (1) por esta função, integrando com relação à variável espacial no domínio (a, b) , integrando por partes o segundo termo e rearranjando, temos a seguinte equação integral

$$\int_a^b \partial_t u(x, t) v(x) dx = \int_a^b f(u(x, t)) \partial_x v(x) dx - f(u(a, t))v(a) + f(u(b, t))v(b). \tag{4}$$

1.4 A Solução Descontínua

A solução numérica da lei de conservação hiperbólica é localmente construída em termos de funções polinomiais locais dependentes apenas da variável espacial e de coeficientes locais dependentes do tempo em que estamos construindo a solução. Dada uma célula

C_j para algum $j = 1, 2, \dots, m$, seja $\Pi_j^k = \{\varphi_0^j(x), \dots, \varphi_k^j(x)\}$ uma base para o espaço $V_h^k|_{C_j} = P^k(C_j)$. Fixada a base Π_j^k , consideremos $k + 1$ coeficientes dependentes do tempo $c_i^j(t)$. Feitas as considerações anteriores, sob a hipótese de separação de variáveis, escrevemos a *solução local* na célula C_j da seguinte forma:

$$u_h(x, t)|_{C_j} = \sum_{i=0}^k c_i^j(t) \varphi_i^j(x), \quad x \in C_j. \tag{5}$$

Como compomos a solução local temos condições de escrever a solução global do método DG em termos da função característica ψ_{C_j} dada por:

$$\psi_{C_j}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in C_j, \\ 0 & \text{se } x \notin C_j. \end{cases} \tag{6}$$

Assim a solução global para o tempo t é dada por:

$$u_h(x, t) = \sum_{i=1}^m u_h(x, t)|_{C_j} \psi_{C_j}(x) \text{ com } x \in (a, b). \tag{7}$$

1.5 Forma Regular do Método de Galerkin Descontínuo

A forma regular do método DG consiste em encontrar $u_h(x, t) \in V_h^k$ tal que, para qualquer $v_h \in V_h^k$ e para todo j , tenhamos:

$$\begin{aligned} \int_{C_j} \partial_t u_h v_h dx &= \int_{C_j} f(u_h) \partial_x v_h dx - \widehat{f}(u_h(x_{j+1/2}^-, t), u_h(x_{j+1/2}^+, t)) v_h(x_{j+1/2}^-) + \\ &+ \widehat{f}(u_h(x_{j-1/2}^-, t), u_h(x_{j-1/2}^+, t)) v_h(x_{j-1/2}^+). \end{aligned} \tag{8}$$

Para obter essa formulação utilizamos a forma fraca dada em (4), restrita agora a um subdomínio, ou célula, C_j e a função de fluxo numérico descrita na Seção 1.2. Fixando uma célula C_j , denotamos $u_h(x, t)|_{C_j}$ simplesmente por u_h^j . Substituindo a expressão (5) no lado esquerdo da igualdade (8) e sabendo que (8) é válida para qualquer $v_h \in V_h^k$, temos que (8) é válida para qualquer elemento de Π_j^k . Fixando $v_h = \varphi_l^j$ para algum $l = 0, 1, \dots, k$ e utilizando a notação $h_{j\pm 1/2} = \widehat{f}(u_h^j(x_{j\pm 1/2}^-, t), u_h^j(x_{j\pm 1/2}^+, t))$, podemos reescrever a equação (8) em termos dos fluxos numéricos $h_{j\pm 1/2}$ como:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^k \partial_t c_i^j(t) \int_{C_j} \varphi_i^j(x) \varphi_l^j(x) dx \right) &= \int_{C_j} f(u_h^j) \partial_x \varphi_l^j dx - h_{j+1/2} \varphi_l^j(x_{j+1/2}^-) + \\ &+ h_{j-1/2} \varphi_l^j(x_{j-1/2}^+). \end{aligned} \tag{9}$$

Como $l = 0, 1, 2, \dots, k$, podemos reescrever (9) em termos de um sistema local de equações diferenciais. Sem perda de generalidade, suponha que na célula C_j o grau máximo do polinômio seja $k_j \leq k$ e defina: $k_{total} = \sum_{j=1}^m (k_j + 1)$ e $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{k_{total}}$ tal que

$\mathbf{c} = [\mathbf{c}^1, \mathbf{c}^2, \dots, \mathbf{c}^m]^T$, com $\mathbf{c}^j = [\mathbf{c}_0^j, \mathbf{c}_1^j, \dots, \mathbf{c}_k^j]^T$. Logo, o sistema local de equações diferenciais na variável temporal pode ser escrito como:

$$\mathbf{M}^j \frac{d\mathbf{c}^j}{dt} = \mathbf{h}^j(\mathbf{c}), \quad (10)$$

onde o vetor $\mathbf{c}^j \in \mathbb{R}^{k_j+1}$ e a matriz $\mathbf{M}^j \in M(\mathbb{R})_{k_j+1}$ é inversível por ser uma matriz cujas entradas m_{ij} são produtos internos do espaço $L^2(P^{k_j}(C_j))$. De forma mais precisa, podemos descrever os elementos de \mathbf{M}^j e $\mathbf{h}^j(\mathbf{c})$ como sendo:

$$m_{pq}^j = \int_{C_j} \varphi_p^j(x) \varphi_q^j(x) dx \quad h_p^j(\mathbf{c}) = \int_{C_j} f(u_h^j) \partial_x \varphi_p^j dx - h_{j+1/2} + h_{j-1/2}, \quad (11)$$

para $p, q = 0, 1, 2, \dots, k_j$. Perceba que o sistema de equações diferenciais em (10) é definido localmente. Podemos exibir um sistema global da seguinte forma: definimos o vetor $\mathbf{h}(\mathbf{c}) \in \mathbb{R}^{k_{total}}$ como $\mathbf{h}(\mathbf{c}) = [h^1(\mathbf{c}), h^2(\mathbf{c}), \dots, h^m(\mathbf{c})]^T$, em que a aplicação $\mathbf{h}^j(\mathbf{c})$ tem as componentes definidas em (11). Deste modo, o sistema de EDO's global pode ser escrito como:

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = (\mathbf{M})^{-1} \mathbf{h}(\mathbf{c}), \quad (12)$$

onde $\mathbf{M} \in M(\mathbb{R})_{k_{total}}$ é dada por $\mathbf{M} = \text{diag}(M^1, M^2, \dots, M^m)$, sendo \mathbf{M} uma matriz inversível de dimensão k_{total} . Para a resolução do sistema de equações diferenciais (12) utilizamos o esquema SSP Runge-Kutta (RK-SSP) [1] e escolhemos a base Π_j^k formada pelos polinômios ortogonais de Legendre, o que torna cada matriz M^j diagonal e consequentemente a matriz \mathbf{M} diagonal por blocos. Em [5] utilizamos a estratégia de RK de 2 estágios e obtivemos resultados semelhantes aos que apresentaremos na seção de experimentos.

1.6 Fluxos Numéricos

Dentre os diversos fluxos numéricos para o método DG estudados na literatura, empregaremos neste trabalho o Fluxo de Lax-Friedrichs Local. O Fluxo de Lax-Friedrichs Local é dado por: $h_{j+1/2} = \frac{1}{2} \left(f(u_{j+1/2}^-) + f(u_{j+1/2}^+) + \alpha_{j+1/2} (u_{j+1/2}^- - u_{j+1/2}^+) \right)$, onde $\alpha_{j+1/2}$ é uma avaliação da maior velocidade de propagação local, dada por $\alpha_{j+1/2} = \left(\max_{u \in C_j} |f'(u)| \right)$.

2 Métodos DG de Alta Ordem

O método DG apresenta oscilações quando são empregados polinômios por partes de grau maior ou igual a um, mesmo quando trocamos o método para resolução do sistema de EDO's associado [5]. Este fato é previsto pelo Teorema de Godunov e verificado através de experimentos numéricos. Para superar tais instabilidades, propomos um método inspirado no uso dos limitadores como nos esquemas NT [4] e KT [2] e nos bons resultados que

estes esquemas fornecem. Vamos propor um algoritmo que atuará na reconstrução dos coeficientes lineares da solução em cada elemento C_j utilizando informações que já foram calculadas durante a formulação do Método DG, como parâmetros para o uso dos limitadores. Em trabalhos futuros pretendemos estudar outras alternativas de estabilização para o DG além da variação dos métodos de resolução do sistema de EDO's associado. Doravante, as abreviação DG0 e DG1 referem-se ao método de Galerkin Descontínuo para polinômios constante por partes e lineares por partes, respectivamente.

2.1 Estabilização para o DG1

A solução local gerada pelo método de Galerkin Descontínuo utilizando os polinômios ortogonais de Legendre para o caso DG1 é dada por

$$u_h(x, t)|_{C_j} = c_0^j(t)\varphi_0^j(x) + c_1^j(t)\varphi_1^j(x), \quad x \in C_j. \quad (13)$$

A ideia é controlar o coeficiente c_1^j que é responsável pela variação linear da solução na célula, de forma a tornar a solução constante por partes em regiões em que o método pode vir a oscilar, como nas regiões próximas a descontinuidades e em regiões de gradientes abruptos. Para tal, tomaremos o limitador minmod definido (para vários argumentos) como

$$\text{minmod}(x_1, x_2, \dots) = \begin{cases} \min_i \{x_i\} & \text{se } x_i > 0 \ \forall i, \\ \max_i \{x_i\} & \text{se } x_i < 0 \ \forall i, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (14)$$

Definimos $\delta \in \mathbb{R}$ como sendo a quantidade $\delta = \text{minmod}(c_0^j - c_0^{j-1}, c_0^{j+1} - c_0^j)$ e os seguintes critérios: se $\delta = 0$ então $c_1^j = 0$, ou seja, na célula C_j teremos uma reconstrução constante por partes; se $\delta \neq 0$ então $c_1^j = \frac{\delta}{2}$, ou seja, na célula C_j teremos uma reconstrução linear por partes.

3 Experimentos Numéricos para o DG

Nesta seção apresentamos estudos numéricos comparativos para o método DG, observando características de estabilidade e a influência da difusão numérica sobre a solução obtida. Vamos fixar nosso estudo para polinômios constantes e lineares. Iremos nos referir ao Método de Galerkin Descontínuo com Estabilização do DG1 baseada no coeficiente linear c_1^j , usando os coeficientes c_0^{j-1} , c_0^j e c_0^{j+1} , como DGSL0. Para facilitar a descrição de nossos experimentos, sejam nv o número de volumes, T o tempo total de simulação e ν o número de Courant. Neste conjunto de testes, estudaremos as soluções numéricas obtidas por esses esquemas na resolução das seguintes equações: de advecção linear, onde o fluxo é dado por $f(u) = au$, $a \in \mathbb{R}$; de Burgers não-viscosa, com fluxo dado por $f(u) = \frac{u^2}{2}$; de Buckley-Leverett, com o fluxo dado por $f(u) = \frac{u^2}{u^2 + w(1-u)^2}$, $w \in \mathbb{R}$. Simulamos um

problema de fronteira livre com a condição inicial do tipo “pulso” descrita por:

$$u_0(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0,1 < x < 0,5, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (15)$$

Em todos os experimentos empregamos os parâmetros: $nv = 100$, $\nu = 0,1$, $T = 0,2$ e $w = 0,5$. Para resolução do sistemas de EDO's utilizaremos o esquema SSP Runge-Kutta de 2 estágios. As integrações numéricas são feitas com Quadratura Gaussiana com 5 pontos de integração. Para o caso do problema de advecção linear, comparamos as soluções obtidas com a solução exata, já para os problemas de Burgers e de Buckley-Leverett comparamos com uma solução de referência feita com o esquema DGSL0 com 2000 volumes e número de Courant $\nu = 0,1$. Restringimo-nos a comparar os resultados gerados pelo método com a solução de referência em cada caso, mas em [5] encontramos comparações de nossa proposta com os já bem estabelecidos Métodos de Volumes Finitos, como por exemplo, os métodos de Lax-Friedrichs (LxF), Local Lax-Friedrichs (LLxF), Nessyahu-Tadmor (NT) e Kurganov-Tadmor (KT). Na Figura 1, verificamos que DG1 oscila nas regiões próximas às discontinuidades, enquanto DG0 e DGSL0 não, porém DG0 é o mais difusivo dentre os que não oscilam. Na Figura 2, comparamos a solução de referência com DG0 e DGSL0 para as equações de Burgers não-viscosa e Buckley-Leverett, ambas com fluxos não-lineares. Constatamos que DGSL0 é menos difusivos que DG0 nos dois casos, assim como no caso linear.

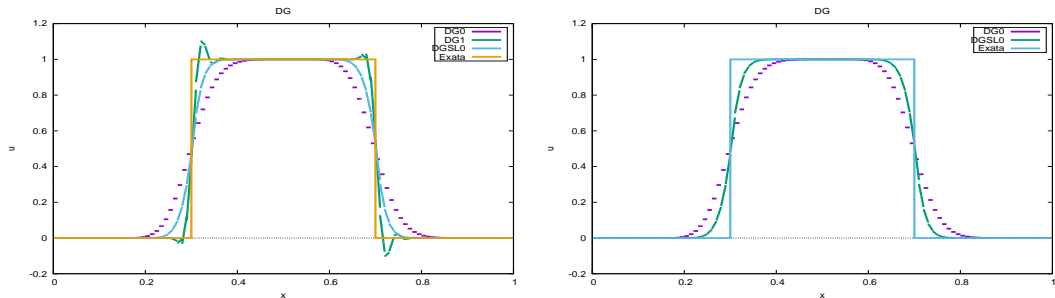


Figura 1: Comparação entre as soluções numéricas DG0, DG1 e DGSL0 (à esquerda) e DG0 e DGSL0 (à direita) com a solução exata do problema de advecção linear, com $nv = 100$ e $\nu = 0,1$.

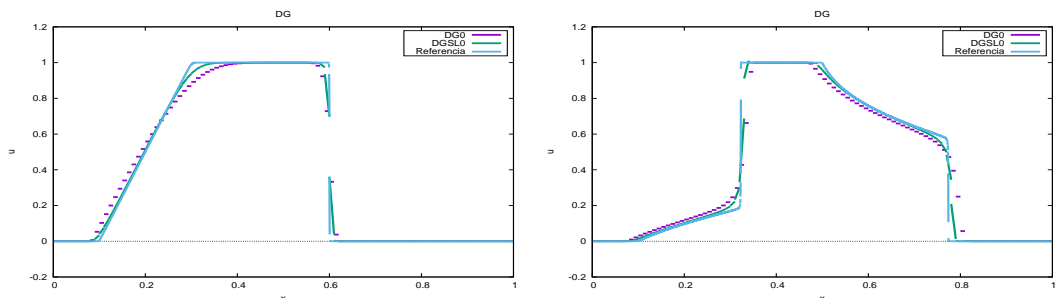


Figura 2: Comparação entre as soluções numéricas DG0 e DGSL0, à esquerda para a equação de Burgers não-viscosa e à direita para a equação de Buckley-Leverett, com suas respectivas soluções de referência, $nv = 100$ e $\nu = 0,1$.

4 Conclusões

No estudo desta classe de métodos, aprendemos que uma de suas grandes vantagens é a flexibilidade na escolha do grau dos polinômios da base, assim como o número de estágios de integração no tempo. E é justamente a liberdade de escolha dos graus dos polinômios da base um dos grandes atrativos dos métodos da classe DG. Os métodos DG de alta ordem baseados em estratégias de estabilização via limitadores de inclinação, juntamente com a escolha dos polinômios ortogonais de Legendre e o esquema SSP-RK de 2 estágios, conduziram a resultados estáveis, não introduzindo novos extremos locais, como exibimos em nossos experimentos.

Agradecimentos

Agradecemos o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), juntamente com o Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional do IMECC/UNICAMP, pelo apoio via uma bolsa institucional CAPES de Mestrado, no período de 08/2013 até 03/2015 e uma bolsa institucional CAPES de Doutorado com início em 08/2015 até o presente momento.

Referências

- [1] E. J. Kubatko, J. J. Westerink, and C. Dawson. Semi discrete discontinuous galerkin methods and stage-exceeding-order, strong-stability-preserving runge-kutta time discretizations. *Journal of Computational Physics*, 222:832–848, 2007. DOI: 10.1016/j.jcp.2006.08.005.
- [2] A. Kurganov and E. Tadmor. New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection–diffusion equations. *Journal of Computational Physics*, 160:241–282, 2000. DOI: 10.1006/jcph.2000.6459.
- [3] Y. Liu, C. W. Shu, E. Tadmor, and M. Zhang. l^2 stability analysis of the central discontinuous galerkin method and a comparison between the central and regular discontinuous galerkin methods. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 42:593–607, 2008. DOI: 10.1051/m2an:2008018.
- [4] H. Nessyahu and E. Tadmor. Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 87:408–463, 1990. DOI: 10.1016/0021-9991(90)90260-8.
- [5] F. A. G. Silva. Um estudo de métodos de galerkin descontínuo de alta ordem para problemas hiperbólicos. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, 2015.