

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Fomulação Lagrangeana Total do método ALI (Aproximação Linear Incremental)

Marcello Goulart Teixeira¹

Departamento de Ciência da Computação, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ

I-Shih Liu²

Instituto de Matemática, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ

Mauro Antonio Rincon³

Departamento de Ciência da Computação, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ

Rolci de Almeida Cipolatti⁴

Instituto de Matemática, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ

Resumo. Métodos incrementais têm sido propostos nos últimos anos para resolver problemas de grande deformações através de sucessivas pequenas deformações. Recentemente, foi proposto um novo método incremental, chamado método das aproximações lineares sucessivas (ALI), que tem mostrado bons resultados e, por isso, tem sido usado na simulação de problemas de grandes deformações, tais como a simulação da formação de domos de sal. Ao contrário dos métodos anteriores, o ALI como foi originalmente formulado, não é considerado um método Lagrangeano. Este trabalho tem como objetivo apresentar uma formulação Lagrangeana desse método, chamada de ALI-L, e comparar os resultados numéricos com aqueles obtidos como o método original.

Palavras-chave. Método ALI, Grandes Deformações, Formulação Lagrangeana, Simulação Numérica

1 Introdução

Métodos incrementais têm sido propostos nos últimos anos para resolver problemas de grande deformações através de sucessivas pequenas deformações, como em [1] e [7]. Em [4] foi proposto um novo método incremental para materiais elásticos, chamado método das aproximações lineares sucessivas (ALI).

Apesar da aparente similaridade entre os métodos incrementais, ao contrário dos anteriores, usualmente escritos em uma formulação Lagrangeana, o ALI usa uma formulação que considera o estado atual do corpo como a configuração de referência, resolvendo em

¹marcellogt@dcc.ufrj.br

²liu@im.ufrj.br

³rincon@dcc.ufrj.br

⁴cipolatti@im.ufrj.br

cada passo de carregamento um problema de pequenas deformações e linearizando as equações constitutivas com relação a configuração de referência.

Em [5] foi apresentada uma formulação desse método para problemas de elasticidade não-linear. Em [2] foi realizada uma análise matemática do método para materiais de Mooney-Rivlin em elasticidade finita. Em [6] o método foi utilizado para a simulação do problema de instabilidade na migração da rocha-sal, considerada como um material viscoelástico. Já em [8] foi apresentada uma formulação termo-viscoelástica para estudo da influência da temperatura sobre a formação de domos de sal.

Este trabalho tem como objetivo apresentar a formulação Lagrangeana do método ALI, aqui chamada de ALI-L, e comparar os resultados numéricos com aqueles obtidos com a formulação original do método.

2 Modelagem Matemática

Esta seção tem como objetivo apresentar, resumidamente, os cálculos necessários para a linearização das equações constitutivas para a definição do método ALI-L. Portanto, os termos de ordem 2 ou superior serão omitidos neste texto e o símbolo "igual a" é utilizado, mesmo após desconsiderar esses termos de ordem superior. Considera-se que em cada passo de tempo tem-se um carregamento pequeno o suficiente para permitir as linearizações e, além disso, em cada passo de tempo as equações constitutivas são atualizadas em relação a uma determinada configuração de referência, ao contrário do método ALI, que sempre atualiza a configuração de referência para a última configuração.

Assim, considere inicialmente κ_0 a configuração de referência do corpo \mathcal{B} e κ_t a configuração deformada no tempo presente t (Figura 1). Definimos $\mathbf{x} = \chi(X, t)$ como a posição de um ponto material $X \in \kappa_0(\mathcal{B})$. O gradiente de deformação para χ , definido entre κ_0 e κ_t , e o gradiente do deslocamento são definidos por

$$F(X, t) = \nabla_X(\chi(X, t)); \quad H(X, t) = \nabla_X u(X, t) \quad (1)$$

Para algum tempo τ , considere a seguinte configuração de deformação κ_τ ,

$$\boldsymbol{\xi} = \chi(X, \tau) := \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \tau) \in \kappa_\tau(\mathcal{B}), \quad \mathbf{x} = \chi(X, t) \in \kappa_t(\mathcal{B}).$$

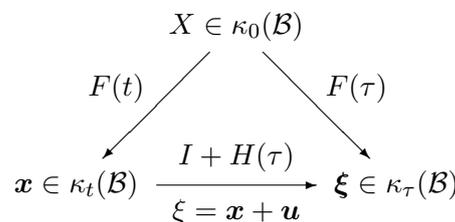


Figura 1: Deformação e gradiente de deformação nas configurações $\kappa_0(\mathcal{B})$ e $\kappa_\tau(\mathcal{B})$ segundo [3]

Considere a configuração no tempo τ com respeito a configuração no tempo presente t definido como $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \tau)$. Definimos também, a vetor deslocamento relativo por $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, \tau) - \mathbf{x} = \chi(X, \tau) - \chi(X, t)$.

Note que, usando (1), obtemos

$$\nabla_X u(X, \tau) = F(X, \tau) - F(X, t) = H(X, \tau). \tag{2}$$

De fato, observe que $H_\tau(x, t) = \nabla_x u(x, \tau)$ e então $\nabla_X u(x, \tau) = \nabla_x u(x, \tau) \nabla_X x(t)$, logo

$$H(X, \tau) = H_t(X, \tau) F(t) \iff H(X, \tau) = \nabla_X u(X, \tau) = F(X, \tau) - F(X, t)$$

Denotaremos $F(\tau) = F$ e $F(t) = F_0$. Sabemos que $F = F_0 + H$. Então o tensor de deformação de Cauchy-Green é dado por

$$B = FF^T = (F_0 + H)(F_0 + H)^T = F_0 F_0^T + F_0 H^T + H F^T + H H^T = B_0 + F_0 H^T + H F_0^T,$$

.

2.1 Cálculo do tensor de tensão e linearização da equação constitutiva

Queremos calcular a diferença entre os tensores $T(\tau) - T(t)$.

O tensor $T(X, t)$, dado por uma equação constitutiva \mathcal{F} na configuração de referência κ_0 e considerando material elástico, é dado por $T(X, t) = \mathcal{F}(F(X, t))$.

Fazendo o desenvolvimento de Taylor e usando (2) tem-se:

$$T(\tau) = T_0 + \partial_F \mathcal{F}(F_0)[F - F_0] = T_0 + \partial_F \mathcal{F}(F_0)[H] = T_0 + L(F_0)[H]$$

Por outro lado, o tensor de tensão é dado por $\mathcal{F}(F) = -pI + s_1 B + s_2 B^{-1}$.

Mas

$$\begin{aligned} B^{-1} &= (FF^T)^{-1} = \left(B_0 + F_0 H^T + H F_0^T \right)^{-1} \\ &= \left(B_0 (I + B_0^{-1} F_0 H^T + B_0^{-1} H F_0^T) \right)^{-1} \\ &= B_0^{-1} - B_0^{-1} F_0 H^T B_0^{-1} - B_0^{-1} H F_0^T B_0^{-1} \end{aligned}$$

Logo

$$B^{-1} - B_0^{-1} = -B_0^{-1} F_0 H^T B_0^{-1} - B_0^{-1} H F_0^T B_0^{-1}$$

Note que $B_0^{-1} = F_0^{-T} F_0^{-1}$, então $B^{-1} - B_0^{-1} = -F_0^{-T} H^T B_0^{-1} - B_0^{-1} H F_0^{-1}$.

Além disso, temos que

$$\begin{aligned} T(\tau) - T(t) &= -(p(\tau) - p(t))I + s_1(B(\tau) - B(t)) + s_2(B^{-1}(\tau) - B^{-1}(t)) \iff \\ T(\tau) - T_0 &= -(p(\tau) - p_0)I + s_1(B(\tau) - B_0) + s_2(B^{-1}(\tau) - B_0^{-1}) \end{aligned} \tag{3}$$

Mas $p(\tau) - p_0 = -\beta \text{tr}(H_t(\tau)) = -\beta \text{tr}(HF_0^{-1})$ onde usamos a relação $H(\tau) = H_t(\tau)F(t)$.

Retornado a igualdade (3) temos

$$T(\tau) - T_0 = \beta \text{tr}(HF_0^{-1})I + s_1(F_0H^T + HF_0^T) - s_2(F_0^{-T}H^TB_0^{-1} + B_0^{-1}HF_0^{-1}) \quad (4)$$

Denominando

$$L(F_0)[H] = \beta \text{tr}(HF_0^{-1})I + s_1(F_0H^T + HF_0^T) - s_2(F_0^{-T}H^TB_0^{-1} + B_0^{-1}HF_0^{-1}) \quad (5)$$

e substituindo (5) em (4) obtemos que

$$T(\tau) = T_0 + L(F_0)[H] \quad (6)$$

Por sua vez, o tensor de Piola-Kirchhoff é dado por

$$\begin{aligned} T_k(\tau) &= (\det F(\tau))T(\tau)F(\tau)^{-T} = \det(F_0 + H)T(\tau)(F_0 + H)^{-T} \\ &= (\det F_0) \det(I + HF_0^{-1})T(\tau)F_0^{-T}(I + F_0^{-1}H)^{-T} \\ &= (\det F_0)(1 + \text{tr}(HF_0^{-1}))(T_0 + L(F_0)[H])(F_0^{-T} - F_0^{-T}H^TF_0^{-T}) \end{aligned}$$

Reiterando que os termos de $o(2)$ foram desprezados, obtemos a parte linear dada por

$$\begin{aligned} T_\kappa(\tau) &= (\det F_0)(T_0F_0^{-T} + \text{tr}(HF_0^{-1})T_0F_0^{-T} - T_0F_0^{-T}H^TF_0^{-T} + L(F_0)[H]F_0^{-T}) \\ &= T_\kappa(t) + (\det F_0)(\text{tr}(HF_0^{-1})T_0F_0^{-T} - T_0F_0^{-T}H^TF_0^{-T} + L(F_0)[H]F_0^{-T}) \end{aligned}$$

Definindo

$$K(F_0, T_0)[H] = (\det F_0)(\text{tr}(HF_0^{-1}))T_0F_0^{-T} - T_0F_0^{-T}H^TF_0^{-T} + L(F_0)[H]F_0^{-T}, \quad (7)$$

então o Tensor de Piola-Kirchhoff é dado por

$$T_\kappa(\tau) = T_\kappa(t) + K(F_0, T_0)[H] \quad (8)$$

2.2 Formulação forte do problema de valor de contorno

No tempo $\tau > t$, consideramos o seguinte problema de valores de fronteira na formulação Lagrangeana com o tempo presente t , dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} -\text{div}_X T_\kappa(\tau) = \rho_\kappa g(\tau), \quad \text{em } \Omega, \\ T_\kappa(\tau) \mathbf{n}_\kappa = \mathbf{f}_\kappa(\tau), \quad \text{em } \Gamma_1, \\ \mathbf{u}(\tau) \cdot \mathbf{n}_\kappa = 0, \quad \text{em } \Gamma_2, \\ T_\kappa(\tau) \mathbf{n}_\kappa \times \mathbf{n}_\kappa = 0, \quad \text{em } \Gamma_2, \end{array} \right. \quad (9)$$

onde $T_\kappa(\tau)$ está definido em (8)

3 Exemplo numérico

Para validação do método será considerado o exemplo de flexão de um bloco retangular pela aplicação apropriada de forças de superfície. Este problema pode ser descrito pela seguinte deformação, como pode ser visto em [3].

$$r = \sqrt{2aX + b}, \quad \theta = cY, \quad z = dZ, \quad \text{para } acd = 1 \quad (10)$$

onde (X, Y, Z) são as coordenadas cartesianas da configuração inicial e (r, θ, z) são as coordenadas cilíndricas para a configuração deformada do corpo. Para esta deformação, as componentes físicas do tensor de deformação de Cauchy-Green no estado deformado é dado por

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} a^2 r^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & c^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & d^2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

onde $\det B = 1$ devido a incompressibilidade.

Esta deformação pertence a uma classe de soluções universais para corpos elásticos isotrópicos incompressíveis, como dado em [9], cuja equação constitutiva pode ser expressa como

$$T = -pI + s_1 B + s_2 B^{-1}$$

onde s_1 e s_2 são funções de (I_B, II_B) , o primeiro e o segundo invariantes de B .

Seja Ω_0 a região da configuração inicial $\kappa_0(B)$ na forma de uma região retangular $0 \leq X \leq X_0, 0 \leq Y \leq Y_0, 0 \leq Z \leq Z_0$. Da deformação dada na equação 10, a configuração deformada $\kappa_t(B)$ é uma região circular Ω com $r_0 \leq r \leq r_1, 0 \leq \theta \leq \theta_0, 0 \leq z \leq z_0$, onde $r_0 = \sqrt{b}, r_1 = \sqrt{2aX_0 + b}, \theta_0 = cY_0, z_0 = dZ_0$, sendo θ_0 o ângulo de flexão.

Para efetuar a flexão de Ω_0 para Ω é necessário aplicar tração de superfície no contorno $\partial\Omega$ da seção circular. Como o tensor de tensão é diagonal, as trações de superfície são normais ao contorno de Ω . Em termos dos componentes físicos, as condições de contorno são dadas por

$$\begin{aligned} T_{rr}(r_0, \theta) &= p(r_0) - s_1 a^2 r_0^{-2} - s_2 a^{-2} r_0^2, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0 \\ T_{rr}(r_1, \theta) &= -p(r_1) + s_1 a^2 r_1^{-2} + s_2 a^{-2} r_1^2, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0 \\ T_{\theta\theta}(r, 0) &= p(r) - s_1 c^2 r^2 - s_2 c^{-2} r^{-2}, \quad r_0 \leq r \leq r_1 \\ T_{\theta\theta}(r, \theta_0) &= -p(r) + s_1 c^2 r^2 + s_2 c^{-2} r^{-2}, \quad r_0 \leq r \leq r_1 \end{aligned} \quad (12)$$

e, de forma análoga, há a tração normal nas superfícies em $z = 0$ e $z = Z_0$. O objetivo então é encontrar a solução do problema de valor de contorno cuja equação de equilíbrio é

$$\text{grad} p - \text{div}(s_1 B + s_2 B^{-1}) = 0$$

na seção circular Ω satisfazendo as condições de contorno dadas em (12). Para isso será considerado o caso $d = 1$, ou seja, não há qualquer deformação na direção z da espessura

da seção circular e, assim, o problema torna-se essencialmente bi-dimensional. Dessa forma, quaisquer constantes $a, b, c = a^{-1}$ e $d = 1$ constituem uma solução exata para este problema de valor de contorno. De fato, no exemplo, $a = c^{-1}$ e $b = c^{-2}$ são escolhidos. Neste caso, a solução exata da pressão é dada por

$$p = s_1 \left(\frac{1}{2c^2r^2} - \frac{c^2r^2}{2} + 1 \right) + s_2 \left(\frac{3c^2r^2}{2} + \frac{1}{c^2r^2} - 1 \right)$$

O exemplo numérico considera os seguintes valores de parâmetros do material e da modelagem ([5]): $s_1 = 1, s_2 = 0.1, \beta = 30000$ para garantir a incompressibilidade, incremento de tração de superfície dado por $\kappa = \pi/1800$ e 450 passos de carregamento, domínio 2×3 discretizado por uma malha retangular com 20 elementos Q4 na direção x ($h_x = 0, 1$) e 30 elementos na direção y ($h_y = 0, 1$).

A Figura 2 apresenta uma comparação do erro relativo na norma L_2 obtido pelos métodos ALI e ALI-L, ao longo de 450 passos de carregamento.

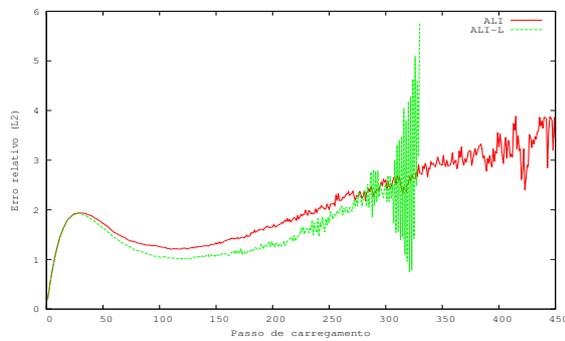


Figura 2: Comparação do erro relativo na norma L_2 entre os métodos, ao longo de 450 passos de carregamento

A Figura 3 apresenta uma comparação entre as configurações deformadas no passo $N = 300$ obtidas pelos métodos ALI e ALI-L e a solução exata.

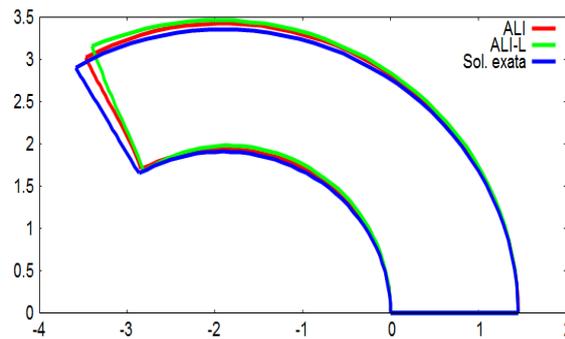


Figura 3: Comparação entre as soluções obtidas pelos métodos ALI e ALI-L e a solução exata no passo de carregamento $N = 300$

4 Conclusões

Os resultados numéricos obtidos neste trabalho permitem uma análise comparativa entre os métodos ALI e ALI-L e mostram que ambas as formulações apresentam bons resultados numéricos.

A Figura 2 mostra que o método ALI-L, apesar de apresentar um erro menor ou igual ao erro do método ALI, não manteve a estabilidade suficiente para alcançar o passo de carregamento $N = 450$, tendo divergido antes do passo $N = 330$. Esse comportamento, já verificado em outras simulações numéricas, ainda será objetivo de trabalhos futuros.

Conclui-se então que o método ALI, apesar de apresentar um erro na norma L_2 sensivelmente maior que o apresentado pelo método ALI-L ao longo da simulação, é vantajoso uma vez que manteve a estabilidade do resultado numérico em mais passos de carregamento, permitindo obter melhores resultados em simulações de problemas de grandes deformações.

Referências

- [1] P.G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity. Three Dimensional Elasticity*. North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [2] R. A. Cipolatti, I-S. Liu, M. A. Rincon. Mathematical analysis of successive linear approximation for Mooney-Rivlin material model in finite elasticity. *Journal of Applied Analysis and Computation*, volume 2, 4:363-379, 2012.
- [3] I-S. Liu, *Continuum Mechanics*, Springer Berlin Heidelberg, 2002.
- [4] I-S. Liu, R. A. Cipolatti, M. A. Rincon. Successive linear approximation for finite elasticity. *Computational & Applied Mathematics*, volume 29, 3:465-478, 2010.
- [5] I-S. Liu. Successive linear approximation for boundary value problems of nonlinear elasticity in relative-descriptive formulation. *International Journal of Engineering Science*, volume 49, 7:635-645, 2011.
- [6] I-S. Liu, R. A. Cipolatti, M. A. Rincon, L. A. Palermo. Successive linear approximation for large deformations - Instability of salt migration. *Journal of Elasticity*, volume 114, 19-39, 2014.
- [7] R.W. Ogden. *Non-Linear Elastic Deformation*. Ellis Horwood, New York, 1984.
- [8] M. G. Teixeira, I-S. Liu, M. A. Rincon, R. A. Cipolatti, L. A. C. Palermo. The influence of temperature on the formation of salt domes. In *Int. J. of Modeling and Simulation for the Petroleum Industry*, volume 8, 2:35-41, 2014.
- [9] C. Truesdell and W. Noll. *The non-linear field theories of mechanics*, Springer Berlin Heidelberg, 2004.