

Estudo do comportamento da análise isogeométrica para o problema de Hemker

Paulo Wander Barbosa¹

Laisa Karoline Muller²

Lucia Catabriga³

Leonardo Muniz de Lima⁴

Sérgio Souza Bento⁵

Laboratório de Computação de Alto Desempenho(LCAD), UFES, Vitória, ES

Resumo. Este trabalho apresenta um estudo numérico de soluções aproximadas para o problema de Hemker utilizando os conceitos da Análise Isogeométrica (AIG) e a ferramenta GeoPDEs. O estudo avalia a influência da disposição das *patches* e dos *knots* na qualidade da solução aproximada, além de apresentar a influência da continuidade das funções base no tamanho e na esparsidade do sistema linear associado e no seu tempo de resolução.

Palavras-chave. Análise Isogeométrica, GeoPDEs, Problema de Hemker.

1 Introdução

Nos últimos anos temos visto os resultados surpreendentes do uso da Análise Isogeométrica em aplicações variadas. Como consequência, ocorre o desenvolvimento de novas estratégias computacionais voltadas ao seu aprimoramento. Há um grande interesse da comunidade acadêmica nessa área devido a acurácia da representação do domínio e da solução, tempo computacional reduzido e ao fato das funções utilizadas alcançarem continuidade elevada, possibilitando o estudo de alguns problemas que, ao serem tratados com a análise de elementos finitos tradicional, geram custo computacional elevado [1–3].

Nesse trabalho, apresentamos um estudo do problema de Hemker, considerado por Collier *et al.* um dos problemas de referência mais difíceis da atualidade [4], descritos pela equação de convecção-difusão no estado estacionário. Para o estudo do problema foi utilizada a ferramenta GeoPDEs [5]. Essa ferramenta tem como propósito facilitar o primeiro contato de pesquisadores de diversas áreas com as funções e operações necessárias para a pesquisa em análise isogeométrica. Por ser um software desenvolvido no GNU/Octave [6], utiliza uma linguagem interpretada, facilitando as modificações do

¹paulowander@gmail.com

²laisakmuller@gmail.com

³luciac@inf.ufes.br

⁴leomunizlima@gmail.com

⁵sergiobento77@gmail.com

usuário e permitindo uma prototipagem rápida. Mesmo que a escolha venha sacrificar o desempenho computacional, a facilidade e agilidade proporcionam resultados satisfatórios.

Este artigo está descrito como segue. Na próxima seção apresentamos as equações que descrevem o problema de Hemker, as configurações do domínio e as ferramentas utilizadas para a resolução do problema. Na seção 3 apresentamos os experimentos numéricos. Primeiramente, estudamos a influência da configuração do domínio na qualidade da solução do problema. Em seguida, analisamos a influência da continuidade no tamanho do sistema linear resultante e, conseqüentemente, no tempo computacional requerido. Finalizamos o artigo com as principais conclusões quanto a aplicação da análise isogeométrica na resolução do problema de Hemker.

2 O problema de Hemker na análise isogeométrica

As seguintes equações descrevem o problema de Hemker [7]:

$$\begin{cases} -\kappa\Delta u + \mathbf{b} \cdot \nabla u = f & \text{em } \Omega, \\ u = u_D & \text{em } \Gamma_D, \\ \kappa\nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{em } \Gamma_N, \end{cases} \quad (1)$$

onde u é a solução desejada, $\kappa = 10^{-4}$, $\mathbf{b} = (1, 0)^T$, $f = 0$, \mathbf{n} é o vetor externo unitário normal à superfície. O domínio $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 \leq x \leq 9, -3 \leq y \leq 3, x^2 + y^2 > 1\}$, com fronteira $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, está apresentado na Fig. 1. O valor prescrito de u em $\partial\Omega$ é dado por

$$u_D(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } (x, y) \in \{-3\} \times [-3, 3], \\ 1, & \text{se } x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \quad (2)$$

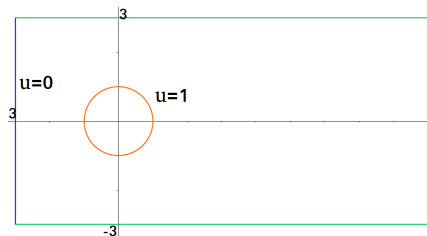


Figura 1: Domínio de Hemker.

Na análise isogeométrica, o domínio é usualmente criado a partir das funções NURBS [8], que são referência na área de desenho assistido por computador por sua capacidade de representar com exatidão objetos que são desenvolvidos na indústria.

Em AIG são definidos um domínio paramétrico, dado pelo quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ em \mathbb{R}^2 , e um domínio físico, que representa o domínio real do problema. A malha no domínio paramétrico em \mathbb{R}^2 é o produto tensorial entre dois vetores de nós, um em cada direção, chamados de vetores de *knots*. Os elementos na malha em \mathbb{R}^2 também são chamados de *knots*.

O domínio paramétrico é mapeado por uma função NURBS inversível (F) sobre uma região do domínio físico, chamada de *patch*. Cada *knot* do domínio paramétrico é levado em um *knot* do domínio físico. Quando o domínio físico pode ser completamente mapeado por apenas uma função F , dizemos que ele é um domínio composto por uma única *patch*. Para domínios físicos mais complexos são realizadas subdivisões neste domínio, criando regiões mais simples onde cada uma delas é mapeada sobre o domínio paramétrico. Neste caso, o domínio físico será obtido pela união dessas *patches*.

A Fig. 2 mostra o domínio paramétrico sendo mapeado sobre uma *patch* que representa o domínio físico. Em destaque, na cor laranja, um *knot* no domínio paramétrico, a sua imagem no domínio físico e o elemento de integração.

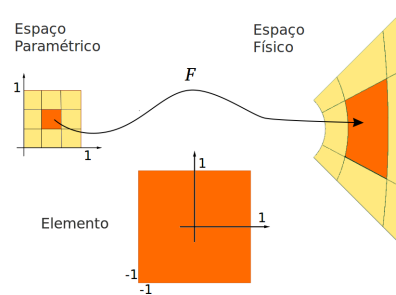


Figura 2: Espaço paramétrico, espaço físico e elemento de integração.

Com o objetivo de estudar a influência da configuração do domínio na solução do problema de Hemker, definimos três configurações de domínio, considerando uma, cinco e seis *patches*, nomeadas por D1, D5 e D6, respectivamente.

A Fig. 3 apresenta as configurações utilizadas. As linhas das figuras representam os contornos de cada *patch*. É importante destacar que existem inúmeras formas de representar o domínio do problema de Hemker. Ao optar por representar o domínio através de uma única *patch*, existem diversas maneiras de introduzir *knots* em cada direção, modificando assim a configuração do domínio. O mesmo ocorre para múltiplas *patches*.

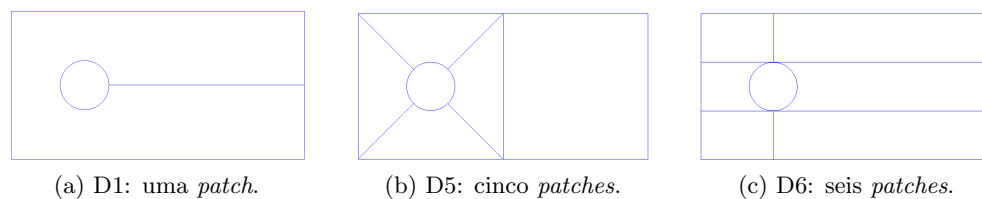


Figura 3: Configurações do domínio utilizadas no experimento.

As três configurações do domínio foram escolhidas para possibilitar um estudo sobre a influência da posição das *patches* e dos *knots*, que formam o domínio, na qualidade da solução. A Fig. 4 apresenta exemplos de malhas utilizando as configurações D1, D5 e D6.

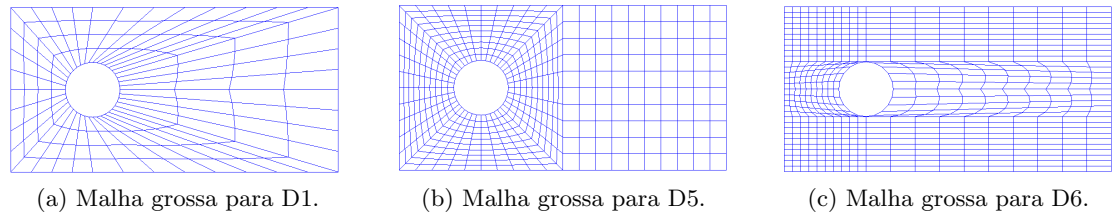


Figura 4: Configurações das malhas grossas do domínio.

3 Experimentos numéricos

Para os experimentos numéricos, utilizamos um computador com as seguintes configurações: sistema operacional Ubuntu 15.10, memória 8GiB, processador Intel[®] Core[™] i7-4650U CPU @ 1.70 GHz x 4.

As subdivisões entre *knots* em cada direção são tomadas de modo a gerar matrizes de ordens semelhantes para cada configuração do domínio. O número de pontos considerado para a regra de integração foi fixado em 4 para cada direção. Como o problema de Hemker possui convecção dominante, o método de estabilização SUPG (*Streamline Upwind Petrov Galerkin*) [9] foi utilizado. Utilizamos o método direto de eliminação de Gauss para resolver o sistema linear proveniente da discretização isogeométrica.

Para realizar um estudo sobre a qualidade da solução, variamos o grau p das funções base entre 2 e 3. Para $p = 2$, as continuidades foram C^0 e C^1 e para $p = 3$, as continuidades foram C^0 , C^1 e C^2 . A melhor combinação de grau e continuidade para as três configurações do domínio foi $p = 3$ com continuidade C^1 . Essa combinação apresentou erros na parte inferior do gráfico na ordem de 10^{-4} , a combinação $p = 2$ e C^0 apresentou erros na ordem de 10^{-2} e as demais combinações apresentaram erros na ordem de 10^{-1} . A Fig. 5 apresenta as soluções para a configuração D1.

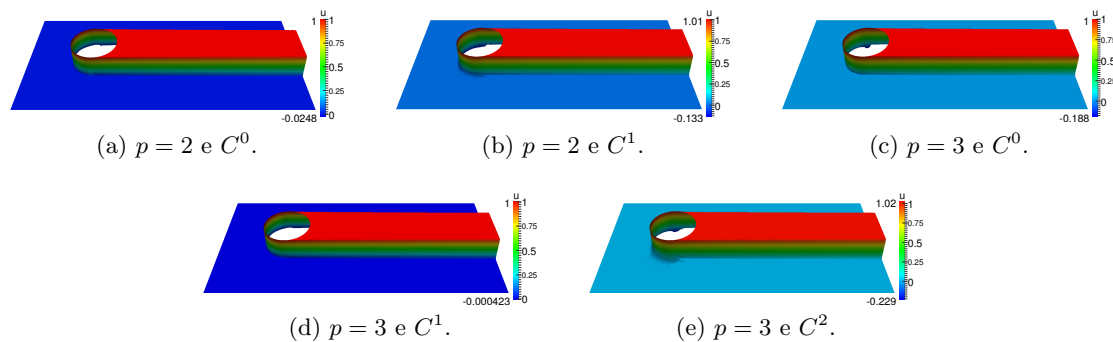


Figura 5: Soluções do problema de Hemker para a configuração D1.

Para a combinação $p = 3$ e C^1 , a matriz do sistema linear resultante para D1, de ordem 737.392, apresenta 26.359.144 elementos não nulos. Para a configuração D5, a matriz resultante de ordem 727.710 possui 26.071.860 elementos não nulos e por fim, a

matriz de D6 de ordem 726.615 possui 26.017.291 elementos não nulos.

As soluções do problema de Hemker para $p = 3$ e C^1 , mostradas na Fig. 6, são aparentemente similares. Porém, realizando um corte na solução definido no plano $y = 1$, é possível notar oscilações nas configurações D1 e D5, conforme pode ser observado na Fig. 7. Essas oscilações não são encontradas na configuração D6, que está em conformidade com o corte de referência, encontrado em [10].

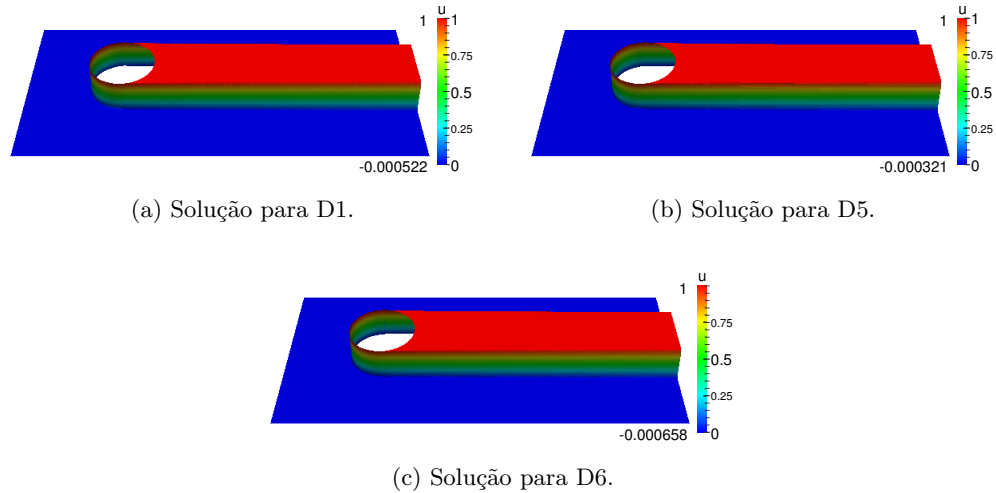


Figura 6: Soluções do problema de Hemker para as configurações D1, D5 e D6 considerando $p = 3$ e C^1 .

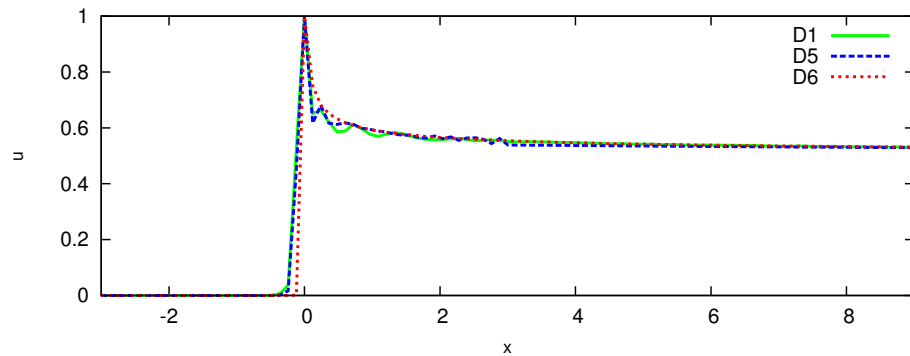


Figura 7: Cortes considerando D1, D5 e D6.

As oscilações das configurações D1 e D5 são provenientes da disposição dos *knots* que recobrem a região do domínio por onde passa o corte. Lados não opostos de *knots* do domínio paramétrico são levados sobre as linhas de grade que interceptam a reta $y = 1$ em ângulos com uma variação decrescente, gerando uma não uniformidade na malha sobre essa reta e uma variação na solução encontrada sobre cada um dos *knots*. O mesmo

ocorre para um corte definido através do plano $y = -1$. Podemos notar que, as oscilações encontradas ao utilizar D1 diminuem a medida que a solução se aproxima de $x = 3$. As oscilações encontradas ao utilizar D5 diminuem até $x = 1,5$ e voltam a crescer até $x = 3$, desaparecendo após esse ponto.

Com o objetivos de analisar a influência da continuidade no tamanho do sistema linear resultante e conseqüentemente o tempo computacional requerido, utilizamos grau fixo $p = 3$ para as funções base e variamos a continuidade considerando C^0 , C^1 e C^2 . A Fig. 8 apresenta o tempo computacional e o tamanho do sistema linear para cada caso.

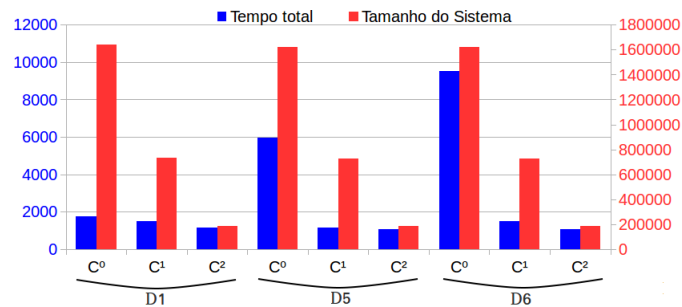


Figura 8: Tempo computacional e tamanho do sistema para as classes C^0 , C^1 e C^2 para as configurações D1, D5 e D6 considerando o grau $p = 3$.

A Fig. 8 demonstra que, elevar a continuidade implica em uma redução do tamanho do sistema linear. Em todas as configurações do domínio, elevando a continuidade de C^0 para C^1 , há uma redução do tamanho do sistema linear de aproximadamente 55% e elevando de C^0 para C^2 a redução varia em torno de 88%. A redução do tempo computacional observada com a elevação da continuidade não ocorreu na mesma proporção que a redução do tamanho do sistema. Considerando a configuração D1, a variação da continuidade mínima para a máxima gerou uma redução de apenas 34%. Para as configurações D5 e D6, essa variação produziu reduções no tempo computacional de 82% e 89%, respectivamente.

Collier *et al.* [4] demonstram que, ao utilizar o método direto, o tempo computacional para resolver um grau de liberdade com continuidade baixa é bem menor que o tempo para se resolver um grau de liberdade com continuidade alta. Por isso, a redução do tamanho do sistema e do tempo computacional ocorrem em proporções diferentes. Além disso, ao compararmos o tempo computacional das funções de classe C^0 nas três configurações do domínio, percebemos uma diferença considerável: utilizando a configuração D1, o tempo computacional é cerca de 3,7 vezes menor que da configuração D5, e cerca de 5,7 vezes menor que da configuração D6.

4 Conclusões

Este trabalho teve como objetivo realizar um estudo da solução numérica aproximada do problema de Hemker obtida através de AIG. Foi avaliado a variação das configurações do domínio, do grau das funções base e da continuidade. Dentre as configurações de domínio apresentadas, notamos que D6 apresentou uma solução aproximada com maior

acurácia devido as suas linhas de grade estarem, em grande parte do domínio, na mesma direção do fluxo na região de alto gradiente. Para as outras configurações, ocorreram oscilações sobre os segmentos que estão sobre as retas $y = 1$ e $y = -1$, e isso se deve as posições dos *knots* que recobrem essa região. Quanto a variação do grau das funções base e da continuidade, a melhor solução foi dada pela combinação $p = 3$ e C^1 . Assim, a combinação $p = 3$ e C^1 em conjunto com a configuração D6 foi mais adequada para o problema de Hemker. Vale destacar que, apesar de não ter apresentado a melhor precisão, a combinação grau $p = 3$ e continuidade C^2 foi a que exibiu menor tempo computacional e menor tamanho do sistema nas três diferentes configurações do domínio.

Referências

- [1] T. J. R. Hughes, J. A. Cottrell, and Y. Bazilevs. Isogeometric analysis: Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(39):4135–4195, 2005.
- [2] T. J. R. Hughes and J. A. Cotrel. *Analysis Isogeometric*. 2009.
- [3] T. J. R. Hughes. *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. Courier Corporation, 2012.
- [4] N. Collier, D. Pardo, L. Dalcin, M. Paszynski, and V. M. Calo. The cost of continuity: A study of the performance of isogeometric finite elements using direct solvers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 213 - 216:353 – 361, 2012.
- [5] C. De Falco, A. Reali, and R. Vázquez. Geopdes: A research tool for isogeometric analysis of pdes. *Advances in Engineering Software*, 42(12):1020–1034, 2011.
- [6] J. W. Eaton, D. Bateman, S. Hauberg, and R. Wehbring. *GNU Octave version 4.0.0 manual: a high-level interactive language for numerical computations*. 2015.
- [7] P. W. Hemker. A singularly perturbed model problem for numerical computation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 76(1-2):277–285, 1996.
- [8] L. Piegl and W. Tiller. *The NURBS Book*. Springer-Verlag New York, Inc., second edition, 1997.
- [9] A. N. Brooks and T. J. R. Hughes. Streamline upwind petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32:199–259, 1982.
- [10] M. Augustin, A. Caiazzo, A. Fiebach, J. Fuhrmann, V. John, A. Linke, and R. Umla. An assessment of discretizations for convection-dominated convection-diffusion equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(47-48):3395–3409, 2011.