Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Simulação Numérica da Equação de Ondas com Condição da Acústica na Fronteira

Adriano A. Alcântara[1]
Mauro A. Rincon[2]
PPGI - Programa de Pós-Graduação em Informática, IM - UFRJ
Haroldo R. Clark[3]
IME - Instituto de Matemática e Estatística, UFF

Resumo. Neste artigo é feita uma simulação numérica para um modelo de ondas com condições de fronteira de Dirichlet e da Acústica nos casos unidimensional e bidimensional. Desenvolvemos um método numérico iterativo, baseado no Método do Elementos Finitos e Diferenças Finitas para determinação da solução numérica aproximada. São também calculados a ordem de convergência do método e o decaimento assintótico da energia.

Palavras-chave. Condições da Acústica na fronteira, Decaimento assintótico, Método de Faedo-Galerkin, Método de Elementos Finitos, Método de Diferenças Finitas.

1 Introdução

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado com fronteira $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ de classe C^2, sendo Γ_0 e Γ_1 de medida positiva, tal que $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$. Queremos determinar um par (u, δ), em que $u : Q \to \mathbb{R}$ e $\delta : \Sigma_1 \to \mathbb{R}$ resolve numericamente o modelo de ondas acoplado com condição de Dirichlet em uma região da fronteira e condição da Acústica na fronteira complementar, dado por:

$$\left|\begin{array}{l} u''(x,t) - \alpha(t)\Delta u(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad Q = \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0,T), \\ u'(x,t) + f_1(x)\delta''(x,t) + f_2(x)\delta'(x,t) + f_3(x)\delta(x,t) = 0 \\ \text{ sobre } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0,T), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = \delta'(x,t) - g(x)u'(x,t) \quad \text{sobre} \quad \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0,T). \end{array}\right. \tag{1}$$

Sobre Γ_0 em $(1)_2$, temos a condição clássica de Dirichlet, na qual há absorção total do som. Em $(1)_3$ temos a condição da Acústica com $f_i(x)$ funções conhecidas, em que, sobre Γ_1, as ondas de som são refletidas na direção oposta à normal exterior de cada ponto de

[1]adriano.alcantara@ppgi.ufrj.br
[2]rincon@dcc.ufrj.br
[3]hclark@vm.uff.br

Γ_1. Suponha por exemplo, uma sala de auditório com uma fonte de som, onde há paredes em que o som é absorvido totalmente (fronteira Γ_0) e em outras (fronteira Γ_1) o som é refletido (eco). Em $(1)_4$ temos a condição de compatibilidade. As condições iniciais para o modelo (1) são as seguintes:

$$\left|\begin{array}{l} \delta'(x,0) = \dfrac{\partial u_0}{\partial \nu}(x) + g(x)u_1(x) \quad \text{sobre} \quad \Gamma_1, \\ \delta(x,0) = \delta_0(x) \quad \text{sobre} \quad \Gamma_1, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x) \quad \text{em} \quad \Omega. \end{array}\right. \tag{2}$$

Em 1974, Beale e Rosencrans [2] foram os precursores das condições de fronteira da Acústica e em 1976 Beale [3] fez uma análise detalhada desta condição de fronteira para a equação linear de ondas em um domínio limitado. Posteriormente, surgiram novos trabalhos, entre outros, usando a condição da Acústica, como se verifica em [4,5,8]. Simulação numérica do modelo (1)-(2), pelo nosso conhecimento, ainda não foi estudado.

O objetivo desse artigo é desenvolver um método numérico e um programa computacional para fazer simulações numéricas, calcular erros, o decaimento assintótico da energia e a ordem de convergência do método numérico.

2 Existência, Unicidade e o Decaimento da Energia

Considere os espaços $V = \{\varphi \in H^1(\Omega); \gamma_0(\varphi) = 0 \,\text{em}\, \Gamma_0\}$ e $H_\Delta(\Omega) = \{\varphi \in H^1(\Omega); \Delta\varphi \in L^2(\Omega)\}$, o conceito de solução global para o modelo (1)-(2) é dado pela definição 2.1.

Definição 2.1. *Uma solução global do problema misto* (1) *é um par de funções* (u, δ) *com* $u : Q \to \mathbb{R}$ *e* $\delta : \Sigma_1 \to \mathbb{R}$ *nas classes*

$$\left|\begin{array}{l} u \in L^\infty_{loc}(0,\infty; V \cap H_\Delta(\Omega)),\ u' \in L^\infty_{loc}(0,\infty; V),\ \ u'' \in L^\infty_{loc}(0,\infty; L^2(\Omega)), \\ \gamma_0(u'),\ \gamma_0(u'') \in L^2_{loc}(0,\infty; L^2(\Gamma_1)) \ \ e \ \ \delta,\ \delta',\ \delta'' \in L^\infty_{loc}(0,\infty; L^2(\Gamma_1)), \end{array}\right. \tag{3}$$

que satisfaz, para cada $T > 0$ *fixo arbitrário, as relações integrais*

$$\left|\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^T \int_\Omega [u''\varphi + \alpha\nabla u \cdot \nabla\varphi] \ dx\, dt = \int_0^T \int_{\Gamma_1} \alpha[\delta' - gu']\varphi \ dx\, dt, \\ \displaystyle\int_0^T \int_{\Gamma_1} [u' + f_1\delta'' + f_2\delta' + f_3\delta]\psi \ \ dx\, dt = 0, \end{array}\right. \tag{4}$$

$\forall\, \varphi \in L^2(0,T;V)$ *e* $\forall\, \psi \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))$. *Além disso,* u *e* δ *satisfazem* (2).

Para estabelecer uma solução (u, δ) no sentido da definição 2.1, assumiremos as seguintes hipóteses:

$$\left|\begin{array}{l} \alpha(t) \in C^1([0,\infty)),\ \alpha'(t) \in L^1(0,\infty) \cap L^\infty(0,\infty) \ \ \text{e} \ \ \alpha(t) \geq \alpha_0 > 0; \\ g(x) \in C(\overline{\Gamma}_1, \mathbb{R}),\ \ \text{tal que} \ \ g(x) \geq g_0 > 0; \\ f_i(x) > 0,\ i = 1,2,3 \ \ \text{e} \ \ f_i \in C(\overline{\Gamma}_1, \mathbb{R}). \end{array}\right. \tag{5}$$

O teorema 2.1 estabelece a existência e unicidade de solução, cuja demonstração pode ser encontrada em [1].

Teorema 2.1. *Suponha* $u_0 \in V \cap H_\Delta(\Omega)$, $u_1 \in V$, $\delta_0 \in L^2(\Gamma_1)$, $\dfrac{\partial u_0}{\partial \nu} - \delta'(x,0) + gu_1 = 0$ *e as hipóteses* (5). *Então existe um único par de funções* (u,δ) *solução do problema misto* (1)-(2) *no sentido da definição 2.1.*

Decaimento da energia - Multiplicando a equação $(1)_1$ por u', fazendo algumas manipulações algébricas, calculamos em [1], baseados no trabalho [4], o decaimento assintótico da energia total associada ao modelo (1)-(2), ou seja, $E(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, em que $|\cdot|$ e $|\cdot|_{\Gamma_1}$ são as normas em $L^2(\Omega)$ e $L^2(\Gamma_1)$, respectivamente, e a identidade da energia é dada por

$$E(t) := \frac{1}{2}\left[|u'(t)|^2 + \alpha(t)\left(|\nabla u(t)|^2 + |f_1^{1/2}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} + |f_3^{1/2}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}\right)\right]. \tag{6}$$

3 Simulação Numérica

Considerando os subespaços $V_m \subset V \cap H_\Delta(\Omega)$ e $Z_m \subset L^2(\Gamma_1)$ gerados pelas m primeiras funções $\varphi_i(x)$ da base Hilbertiana dos espaços de Hilbert $V \cap H_\Delta(\Omega)$ e $L^2(\Gamma_1)$, cuja existência desta base pode ser encontrada em [6] e aplicando o método de Galerkin, o problema aproximado consiste em determinar $u_m : (0,T) \to V_m$ e $\delta_m : (0,T) \to Z_m$, representadas por $u_m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} c_i(t)\varphi_i(x)$ e $\delta_m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} d_i(t)\varphi_i(x)$, tais que

$$\left|\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{i=1}^{m} c_i''(t)(\varphi_i,\varphi_j) + \alpha(t)\sum_{i=1}^{m} c_i(t)(\nabla\varphi_i,\nabla\varphi_j) + \alpha(t)\sum_{i=1}^{m} c_i'(g\varphi_i,\varphi_j)_{\Gamma_1} \\
\quad \displaystyle - \alpha(t)\sum_{i=1}^{m} d_i'(t)(\varphi_i,\varphi_j)_{\Gamma_1} = (f,\varphi_j), \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{m} d_i''(t)(f_1\varphi_i,\varphi_j)_{\Gamma_1} + \sum_{i=1}^{m} d_i'(t)(f_2\varphi_i,\varphi_j)_{\Gamma_1} + \sum_{i=1}^{m} d_i(t)(f_3\varphi_i,\varphi_j)_{\Gamma_1} \\
\quad \displaystyle + \sum_{i=1}^{m} c_i'(t)(\varphi_i,\varphi_j)_{\Gamma_1} = (h,\varphi_j)_{\Gamma_1}, \ \text{ para } \ j = 1,\ldots,m.
\end{array}\right. \tag{7}$$

Formulação matricial - Usando para os casos unidimensional e bidimensional as funções bases $\varphi_i(x)$ sendo lineares por partes e definindo as matrizes de (7), segue, para $i,j \in \{1,\ldots,m\}$:

$A = \big(\varphi_i(x),\varphi_j(x)\big)$, $K = \big(\nabla\varphi_i(x),\nabla\varphi_j(x)\big)$, $E_1 = \big(\varphi_i(x),\varphi_j(x)\big)_{\Gamma_1}$,

$H_1 = \big(f_1(x)\varphi_i(x),\varphi_j(x)\big)_{\Gamma_1}$, $H_2 = \big(f_2(x)\varphi_i(x),\varphi_j(x)\big)_{\Gamma_1}$, $H_3 = \big(f_3(x)\varphi_i(x),\varphi_j(x)\big)_{\Gamma_1}$,

$H_4 = \big(g(x)\varphi_i(x),\varphi_j(x)\big)_{\Gamma_1}$, $F = \big(f(x,t),\varphi_j(x)\big)$, $G = \big(h(x,t),\varphi_j(x)\big)_{\Gamma_1}$.

Sistema de EDO - Usando a notação matricial e substituindo no problema (7), obtemos o Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) de segunda ordem:

$$\left|\begin{array}{l}
Ac''(t) + \alpha(t)Kc(t) + \alpha(t)H_4c'(t) - \alpha(t)E_1d'(t) = F(t) \\
H_1d''(t) + H_2d'(t) + H_3d(t) + E_1c'(t) = G(t) \\
c(0) = u_{0m}(x), \ \ c'(0) = u_{1m}(x), \ \ d(0) = \delta_{0m}(x), \ \ d'(0) = \delta'_m(x,0).
\end{array}\right. \tag{8}$$

Como, em geral, a solução analítica é não conhecida, o sistema será resolvido numericamente pelo Método das Diferenças Finitas. Para isso, fazendo $t = t_k := k\Delta t$, com $k = 1, \ldots, N$, procedemos fazendo $t = t_{k+1}$ e $t = t_{k-1}$ no sistema, fizemos a média, e usamos aproximação por diferença central de ordem dois para os termos com derivada segunda e diferença atrasada e adiantada de ordem dois para os termos com derivada primeira, obtendo o seguinte método iterativo:

$$\left|\begin{array}{l} \big[2A+(\Delta t)^2\alpha^{k+1}K+(\Delta t)\dfrac{(3\alpha^{k+1}-\alpha^{k-1})}{2}H_4\big]\mathbf{c^{k+1}}-\big[(\Delta t)\dfrac{(3\alpha^{k+1}-\alpha^{k-1})}{2}E_1\big]\mathbf{d^{k+1}} \\ =\big[4A+2(\Delta t)(\alpha^{k+1}-\alpha^{k-1})H_4\big]c^k-\big[2A+(\Delta t)^2\alpha^{k-1}K+(\Delta t)\dfrac{(\alpha^{k+1}-3\alpha^{k-1})}{2}H_4\big]c^{k-1} \\ -\big[2(\Delta t)(\alpha^{k+1}-\alpha^{k-1})E_1\big]d^k+\big[(\Delta t)\dfrac{(\alpha^{k+1}-3\alpha^{k-1})}{2}E_1\big]d^{k-1}+(\Delta t)^2(F^{k+1}+F^{k-1}); \\ (\Delta t)E_1\mathbf{c^{k+1}} \quad + \quad \big[2H_1+(\Delta t)H_2+(\Delta t)^2H_3\big]\mathbf{d^{k+1}} = 4H_1d^k \quad + \\ \big[-2H_1+(\Delta t)H_2-(\Delta t)^2H_3\big]d^{k-1}+(\Delta t)E_1c^{k-1}+(\Delta t)^2(G^{k+1}+G^{k-1}). \end{array}\right. \tag{9}$$

Por simplicidade, denotemos o lado direito da igualdade das equações de (9) por L_1 e L_2, respectivamente, e as matrizes do lado esquerdo da igualdade por

$$M_1 = \big[2A+(\Delta t)^2\alpha^{k+1}K+(\Delta t)\frac{(3\alpha^{k+1}-\alpha^{k-1})}{2}H_4\big], \quad M_2 = -\big[(\Delta t)\frac{(3\alpha^{k+1}-\alpha^{k-1})}{2}E_1\big],$$

$$M_3 = (\Delta t)E_1 \quad \text{e} \quad M_4 = \big[2H_1+(\Delta t)H_2+(\Delta t)^2H_3\big].$$

Dessa forma, obtemos o seguinte sistema acoplado de matriz bloco, em que cada matriz tem ordem $m \times m$, donde o sistema tem ordem $2m \times 2m$:

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c^{k+1}} \\ \mathbf{d^{k+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

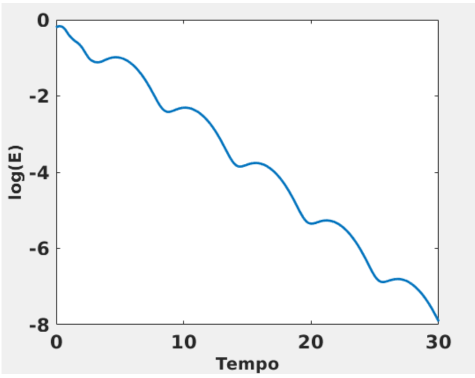
Para inicializar o método iterativo (10), ou seja, para $k = 1$, os termos $c'(0)$ e $d'(0)$ são aproximados por diferença central (ver [1]), mantendo a ordem $O(\Delta t^2)$.

4 Resultados Numéricos

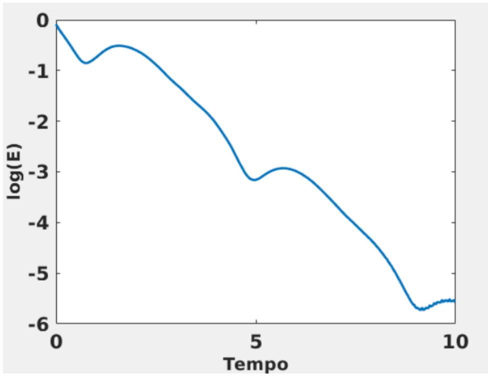
Como a priori não conhecemos o par de solução exata do modelo (1), introduzimos duas forças suficientemente regulares $f(x,t)$ e $h(x,t)$ no lado direito das equações $(1)_1$ e $(1)_3$, respectivamente, de modo que a solução exata (u,δ) submetida às condições inicias e de contorno, seja conhecida, afim de validarmos o método utilizado, medindo o erro e a ordem de convergência. Em seguida retornamos ao modelo original (1), isto é, fazendo f e h nulas, sendo que neste caso não conhecemos mais a solução exata e consideramos como "solução exata" uma solução numérica com discretização no tempo e no espaço bem refinada. No caso em que f e h são não nulas denominamos de modelo não-homogêneo e modelo homogêneo no caso em que f e h são nulas.

Com o objetivo de estimar a ordem de convergência, denotada por p, consideramos discretizações idênticas para o espaço e o tempo, denotadas por h_i, em que para cada h_i, E_i é o erro associado à solução numérica medido nas normas indicadas nas tabelas 1 - 4. Assim, dados h_i e h_{i+1}, com $h_{i+1} = h_i/2$, a ordem de convergência é dada por $p = ln(\|E_i\|/\|E_{i+1}\|)/ln(2)$ (veja [7]).

Na Figura 1 é mostrado numericamente o decaimento da energia (6) para os casos 1d e 2d, em que T é o tempo final do intervalo $(0, T)$.



(a) Caso 1d, com $h = \Delta t = 2^{-9}$ e $T = 30$.



(b) Caso 2d, com $h = \Delta t = 2^{-7}$ e $T = 10$.

Figura 1: Decaimento assintótico da energia $E(t)$ para o modelo original (1).

4.1 Caso unidimensional

Para os modelos não-homogêneo e homogêneo consideramos $T = 1$, $\Omega = (0, 1)$, $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, onde $\Gamma_0 = \{0\}$ e $\Gamma_1 = \{1\}$, e as condições:

$$u_0(x) = -0.5x(x-1),\ u_1(x) = 0,\ \delta_0 = 1 \text{ e } \delta'(1,0) = -0.5.$$

$$f_1(1) = f_2(1) = f_3(1) = 1 \ \ e \ \ \alpha(t) = t + 1.$$

Modelo não-homogêneo - Sejam $u(x,t) = -0.5x(x-1)cos(t)$ e $\delta(1,t) = 1 - 0.5sen(t)$.

Nas Tabelas 1 e 2 são mostrados o erro em relação aos parâmetros de discretização espacial e temporal, quando estes são iguais, e a ordem de convergência.

Tabela 1: Erro de (u_m, δ_m) com ordem de convergência p e $h = \Delta t$.

$h = \Delta t$	$E^{u_m}_{L^\infty(0,1;L^2(0,1))}$	$E^{\delta_m}_{abs}$	p_{u_m}	p_{δ_m}
2^{-5}	0.55897×10^{-4}	0.10931×10^{-4}	-	-
2^{-6}	0.13750×10^{-4}	0.02699×10^{-4}	2.0233	2.0176
2^{-7}	0.03408×10^{-4}	0.00670×10^{-4}	2.0122	2.0099
2^{-8}	0.00848×10^{-4}	0.00167×10^{-4}	2.0063	1.9993
2^{-9}	0.00211×10^{-4}	0.00042×10^{-4}	2.0032	1.9951

Modelo homogêneo - Consideramos a “solução exata” como a solução numérica refinada com $h = \Delta t = 2^{-10}$.

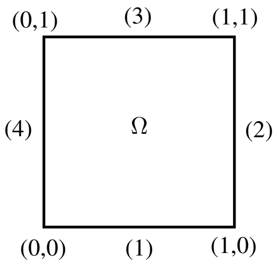
DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0337

Tabela 2: Erro de (u_m, δ_m) com ordem de convergência p e $h = \Delta t$.

$h = \Delta t$	$E^{u_m}_{L^\infty(0,1;L^2(0,1))}$	$E^{\delta_m}_{abs}$	p_{u_m}	p_{δ_m}
2^{-5}	0.58067×10^{-3}	0.35927×10^{-3}	-	-
2^{-6}	0.18167×10^{-3}	0.08550×10^{-3}	1.6763	2.0710
2^{-7}	0.05668×10^{-3}	0.02117×10^{-3}	1.6802	2.0133
2^{-8}	0.01718×10^{-3}	0.00504×10^{-3}	1.7222	2.0710
2^{-9}	0.00449×10^{-3}	0.00100×10^{-3}	1.9357	2.3227

4.2 Caso bidimensional

Para o caso unidimensional a fronteira Γ_1 se reduz a um único ponto. No caso bidimensional podemos tomar uma região (lado) em que há uma maior influência da acústica. Para os modelos não-homogêneo e homogêneo consideramos $T = 1$, $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ e $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, onde $\Gamma_0 = (2) \cup (3) \cup (4)$ e $\Gamma_1 = (1)$, e as condições:



$$\begin{aligned} &u_0(x,y) = u_1(x,y) = \gamma x(x-1)(y-1)^2, \quad \delta_0(x) = 0, \\ &\delta'(x,0) = \gamma x(x-1)(2+g), \\ &f_1 = f_2 = f_3 = g = 1, \quad \alpha(t) = t+1 \ \text{ e } \ \gamma = -2. \end{aligned} \tag{11}$$

Modelo não-homogêneo - Sejam $u(x,y,t) = \gamma x(x-1)(y-1)^2 e^t$ e $\delta(x,t) = (2+g)\gamma x(x-1)(e^t - 1)$.

Nas Tabelas 3 e 4 são mostrados a relação do erro quando a discretização do espaço e tempo são iguais, isto é, $h = \Delta x = \Delta y = \Delta t$ e a ordem de convergência.

Tabela 3: Erro de (u_m, δ_m) com $h = \Delta x = \Delta y = \Delta t$ e ordem de convergência p.

$h = \Delta t$	$E^{u_m}_{L^\infty(0,1;L^2(\Omega))}$	$E^{\delta_m}_{L^\infty(0,1;L^2(\Gamma_1))}$	p_{u_m}	p_{δ_m}
2^{-4}	0.58130×10^{-3}	0.0064395	-	-
2^{-5}	0.14379×10^{-3}	0.0016105	2.0153	1.9994
2^{-6}	0.03577×10^{-3}	0.0004027	2.0070	1.9995
2^{-7}	0.00892×10^{-3}	0.0001007	2.0032	1.9997
2^{-8}	0.00222×10^{-3}	0.0000251	2.0014	1.9998

Modelo homogêneo - Consideramos neste caso a "solução exata" como a solução numérica refinada com $h = \Delta x = \Delta y = \Delta t = 2^{-8}$.

Tabela 4: Erro de (u_m, δ_m) com $h = \Delta x = \Delta y = \Delta t$ e ordem de convergência p.

$h = \Delta t$	$E^{u_m}_{L^\infty(0,1;L^2(\Omega))}$	$E^{\delta_m}_{L^\infty(0,1;L^2(\Gamma_1))}$	p_{u_m}	p_{δ_m}
2^{-3}	0.0050778	0.0024890	-	-
2^{-4}	0.0020319	0.0006882	1.3213	1.8546
2^{-5}	0.0006588	0.0001819	1.6248	1.9193
2^{-6}	0.0002172	0.0000451	1.6003	2.0107
2^{-7}	0.0000618	0.0000092	1.8116	2.2884

5 Conclusão

As simulações numéricas do modelo (1)-(2) feitas a partir dos Métodos Numéricos desenvolvidos e apresentadas nos casos unidimensional e bidimensional, mostram resultados numéricos satisfatórios, e que a ordem de convergência, como esperado, é quadrática. A simulação para a energia (6) comprova o resultado teórico do decaimento da energia em [1].

Referências

[1] A. A. Alcântara. Estabilização, Análise e Simulação Numérica da Equação de Ondas com Condição da Acústica na Fronteira. Dissertação de Mestrado, PPGI - UFRJ, 2015.

[2] J. T. Beale, S. I. Rosencrans. Acoustic Boundary Conditions. *Bulletin of the american mathematical society*, v. 80, n. 6, p. 1276-1278, 1974.

[3] J. T. Beale. Spectral properties of an acoustic boundary condition. *Indiana University Mathematics Journal*, v. 25, n. 9, p. 895-917, 1976.

[4] P. B. da Silva, H. R. Clark e C. L. Frota. On a nonlinear coupled system of thermoelastic type with acoustic boundary conditions. *Computational and Applied Mathematics*, p. 1-18, 2015.

[5] C. L. Frota, N. A. Larkin. Uniform stabilization for a hyperbolic equation with acoustic boundary conditions in simple connected domains. In: CASENAVE, T. et al. (Ed.). *Contributions to nonlinear analysis*. Basileia: Birkhäuser, 2006, p. 297-312. (Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, 66).

[6] L. A. Medeiros, M. A. Miranda. On a boundary value problem for wave equations: existence, uniqueness-asymptotic behavior. *Revista de Matemáticas Aplicadas*, Santiago, v. 17, p. 47-73, 1996.

[7] M. A. Rincon, I-S. Liu. *Introdução ao método dos elementos finitos*. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2013.

[8] A. Vicente. Equações de ondas com condições de fronteira da acústica. Tese de Doutorado, Matemática Aplicada, UNICAMP, 2010.

