Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Explorando matrizes de markov através do SageMath

Tiarles Guterres[1]
Engenharia de Computação, Centro de Tecnologia, UFSM, Santa Maria, RS
Alice Kozakevicius[2]
Laboratório de Análise Numérica, Centro de Ciências Naturais e Exatas, UFSM, Santa Maria, RS

1 Introdução

Tomando-se como base os conteúdos vistos na disciplina de álgebra linear do curso de graduação em Engenharia de Computação, UFSM, e da versatilidade da utilização de recursos computacionais nas nuvens, propõe-se a utilização da ferramenta SageMath [2] e da Linguagem Python para se explorar várias propriedades interessantes sobre cadeias de markov e matrizes estocásticas, propiciando alternativas computacionais para o ensino de álgebra linear com um viés mais aplicado à modelagem e resolução de problemas.

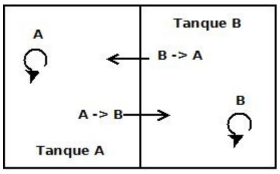
2 Matrizes de Markov

As matrizes estocásticas consideradas em processos iterativos que caracterizam as cadeias de Markov têm sua construção definida a partir da probabilidade de um evento ou fenômeno mudar de estado. Um exemplo interessante para ilustrar essa construção é o apresentado por Strang em [1]. Neste exemplo, tem-se a taxa para que um cardume de peixes permaneça em um tanque A e a taxa de transição para um tanque B. Estas taxas podem ser dependentes de um certo valor de tempo ou de algum fator direto que modifique o comportamento dos peixes. Para se analisar a dinâmica deste problema, deve ser dado um valor inicial referente à quantidade de peixes em cada um dos tanques (o vetor inicial ($v^{(0)}$)), como ilustrado na Figura (1). A cada nova iteração a distribuição se ajusta até convergir para valores associados a um fluxo contínuo, ou seja, quando a quantidade de peixes que vai do tanque A para o B for igual à quantidade que vai do tanque B para o A.

3 Convergência

Através do Sagemath pode-se executar com facilidade processos iterativos , em especial aqueles envolvendo o produto matriz-vetor ou vetor-matriz ($(v^{(0)}) \times (T^i) = (v^{(i)})$), como utilizado em vários problemas evolutivos, usuais na formulação de cadeias de Markov.

[1] tiarlesmoralles@hotmail.com
[2] alice.kozakevicius@gmail.com



$$\begin{pmatrix} TanqueA^{(0)} \\ TanqueB^{(0)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & B \to A \\ A \to B & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} TanqueA^{(1)} \\ TanqueB^{(1)} \end{pmatrix}$$
, onde $\mathrm{A} + (\mathrm{A} \to B) = (B \to A) + B = 1$

Figura 1: Exemplo dos tanques de peixes

Desta forma, estudar a dinâmica do processo evolutivo referente ao movimento dos peixes, por exemplo, torna-se um recurso eficaz na compreensão de vários conceitos envolvendo matrizes. De particular interesse é o estudo sobre a convergência de $(v^{(i)})$), que depende de propriedades da matriz estocástica e suas iteradas, (T^i). Há alguns características que dão a ideia do número de iterações necessárias para um processo iterativo convergir, como por exemplo:

- quanto maior a diferença entre as taxas de distribuição em cada linha ou coluna, maior o número de iterações para a convergência;
- quanto maiores as taxas nas regiões ilustradas por $(A \to B)$ ou $(B \to A)$, Figura (1), maior o número de iterações necessárias para convergência. Estas são regiões que "transferem" ou "distribuem" informação nas matrizes estocásticas;
- quando ainda o determinante da matriz estocástica for zero (matriz singular), as taxas de distribuições serão as mesmas e a matriz estará na sua forma estacionária. No exemplo (Figura 1), após uma única iteração $((v^{(0)}) \times (T) = (v^{(1)}) = (v^{(\infty)}))$ já obtém-se este estado.

4 Matriz Inversa

Através do SageMath pode.se explorar também a existência da matriz inversa e sua obtenção. No caso de uma matriz Markov (T) não singular, sua inversa $(T)^{-1}$ também preservará a soma dos elementos de cada linha (ou cada coluna) ser 1. Além disso, como todos os valores da matriz de Markov são positivos, alguns dos valores de sua inversa necessariamente devem ser negativos para que $(T)(T)^{-1} = I$, como no exemplo (1):

$$\begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Referências

[1] W. G. Strang. Lecture 24: Markov chains; fourier series (MIT). Site: http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-06-linear-algebra-spring-2010/video-lectures/lecture-24-markov-matrices-fourier-series/

[2] Sagemath. *códigos em Python e linguagem R. Site: https://cloud.sagemath.com/*

