Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estabilidade Global do Modelo Epidemiológico SIS

Gustavo Borges Vieira[1]
José Paulo Carvalho dos Santos[2]
Evandro Monteiro[3]
Instituto de Ciências Exatas, UNIFAL-MG, Alfenas, MG

1 Introdução

Um dos problemas em epidemiologia matemática é análise assintótica da estabilidade global de pontos de equilíbrio de sistemas de doenças infecciosas. Neste trabalho foram calculados algebricamente os pontos de equilíbrio de um sistema de equações diferenciais ordinárias e estudou-se a estabilidade global pelo Princípio da Invariância de La Salle utilizando uma função de Lyapunov. A função de Lyapunov, apresentada em [1], foi

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_i^* - x_i^* \ln \frac{x_i}{x_i^*}) \tag{1}$$

2 O modelo SIS

Existem doenças infecciosas que mesmo após a recuperação não garantem imunidade ao indivíduo, podendo tornar-se suscetível à doença após a infecção. Esse tipo de doença pode ser modelado pelo sistema SIS (suscetível-infectado-suscetível), dado pelo sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Lambda - \frac{\beta SI}{S+I} - \mu S + \phi I \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta SI}{S+I} - (\alpha + \mu + \phi) I \end{aligned} \tag{2}$$

A população é dividida em duas classes disjuntas, suscetíveis (S) e infectados (I), que variam com o tempo t. Os parâmetros são constantes positivas. Λ é a taxa de suscetíveis correspondente ao nascimento e imigração, μ é a taxa de mortalidade natural, β é o coeficiente de transmissão da doença, α é a taxa de mortalidade relacionada a doença e ϕ é a taxa de indivíduos infectados que voltam ser suscetíveis. A região viável das possíveis soluções para o sistema (2) é um conjunto positivamente invariante.

$$\Omega = \left\{ (S,I) \in \mathbb{R}^2 : S \geq 0, I \geq 0, S + I \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$$

[1]gborgesvieira@gmail.com
[2]zepaulo@unifal-mg.edu.br
[3]evandro.monteiro@unifal-mg.edu.br

Os pontos de equilíbrio livre da doença e endêmico de (2), respectivamente, são: $E^0 = (S, I) = (\frac{\Lambda}{\mu}, 0)$ e $E^* = (S^*, I^*)$ em que:

$$S^* = \frac{\Lambda}{\mu + (\alpha+\mu)(R_0 - 1)} \qquad I^* = \frac{\Lambda(R_0 - 1)}{\mu + (\alpha+\mu)(R_0 - 1)}$$

A taxa de reprodução básica de (2) é $R_0 = \frac{\beta}{\alpha+\mu+\phi}$ que representa o número médio de casos secundários que um indivíduo infectado pode gerar em uma classe suscetível.

2.1 Estabilidade Global dos pontos de equilíbrio

Teorema 1. *Se $R_0 \leq 1$, então o ponto de equilíbrio livre da doença E^0 é globalmente assintoticamente estável em Ω.*

Demonstração: Seja a função de Lyapunov $V : \{(S, I) \in \Omega : S > 0\} \to \mathbb{R}$ dada por $V(S, I) = \frac{I^2}{2}$, na qual $V(E^0) = 0$. Pela Regra da Cadeia, temos que a derivada de V em relação ao tempo t é,

$$V'(S, I) = -(\alpha+\mu+\phi)\frac{I^2}{S+I}\left[(1 - R_0)S + I\right]. \tag{3}$$

Logo $V' \leq 0$ quando $R_0 \leq 1$. Pelo Princípio da Invariância de La Salle, toda solução de (2) aproxima-se de E^0 quando $t \to \infty$. ■

Teorema 2. *Se $R_0 > 1$, então o ponto de equilíbrio endêmico E^* é globalmente assintoticamente estável em Ω.*

Demonstração: Seja a função de Lyapunov $L : \{(S, I) \in \Omega : S, I > 0\} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$L(S, I) = \left[(S - S^*) + (I - I^*) - (S^* + I^*) \ln \frac{S + I}{S^* + I^*}\right] + \frac{(\alpha + 2\mu)(S^* + I^*)}{\beta I^*}\left(I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*}\right) \tag{4}$$

calculando a derivada de (4), temos pela Regra da Cadeia que a derivada, em relação ao tempo t, $L'(S, I) < 0$. Logo, o maior conjunto compacto invariante em $\{(S, I) \in \Omega : L' = 0\}$ é o ponto isolado $\{E^*\}$. Pelo Princípio da Invariância de La Salle, temos que E^* é globalmente assintoticamente estável. ■

O modelo e a função de Lyapunov foram retirados de [2], e feitos os processos algébricos desta função. Almeja-se analisar a estabilidade global de pontos de equilíbrio utilizando um novo Princípio da Estabilidade de La Salle para equações com ordem fracionária.

Agradecimentos

Agradecimentos à CAPES e a FAPEMIG.

Referências

[1] N. Bobko, Estabilidade de Lyapunov e Propriedades Globais para Modelos de Dinâmica Viral. Dissertação de Mestrado de Matemática Aplicada, UFPR, 2010.

[2] C. V. León, On the Global Stability of SIS, SIR and SIRS Epidemic Models with Standard Incidence. *Chaos, Solitons & Fractal*, volume 44, 2011. DOI: 10.1016/j.chaos.2011.09.002

