Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Radicais duplos e a raiz quadrada de um número complexo

Olga Harumi Saito[1]
Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, Curitiba, PR
Rudimar Luiz Nós[2]
Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, Curitiba, PR
Marcos André dos Santos[3]
IFSC, Palhoça Bilíngue, SC

Resumo. Apresentamos neste artigo as relações que permitem escrever um radical duplo do tipo $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ como uma soma (ou diferença) de radicais simples da forma $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$. Empregamos um problema geométrico presente no vestibular do ITA de 1990 para motivar o estudo de radicais duplos e usamos as relações provenientes da transformação para calcular a raiz quadrada de números complexos de uma forma simplificada. Os objetivos do trabalho são relacionar Geometria e Álgebra, aplicar o estudo de radicais e destacar a importância da correlação de conteúdos em sala de aula.

Palavras-chave. Radiciação, volume da pirâmide, circuitos elétricos.

Abstract. We present in this article the relationships that allow to write a double radical of type $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ as a sum (or difference) of simple radicals of the form $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$. We use a geometric problem included in 1990 ITA vestibular to motivate the study of double radicals and we employ the relations from the transformation to calculate the square root of complex numbers in a simplified way. The aims of the work are to connect Geometry and Algebra, apply the study of radicals and highlight the importance of contents correlation in classroom.

Keywords. Root extraction, volume of the pyramid, electric circuits.

1 Problema motivador

O problema descrito a seguir foi proposto no vestibular do Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) de 1990.

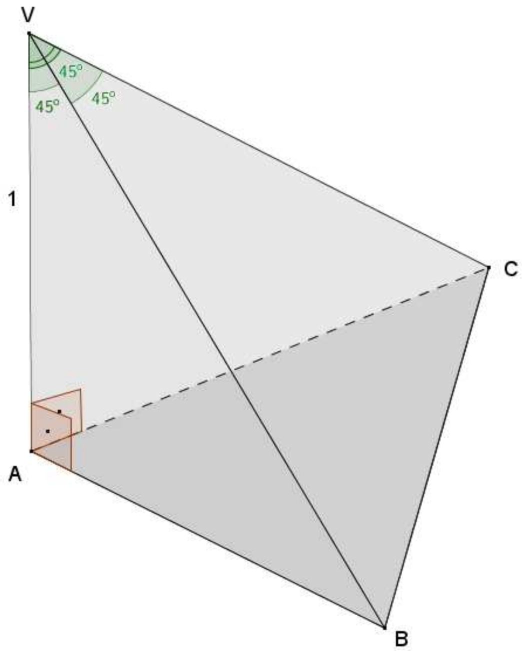
Seja uma pirâmide de vértice V e base triangular ABC. O segmento $\overline{AV}$, de comprimento unitário, é perpendicular à base e os ângulos das faces laterais, no vértice V, medem 45^o, como ilustra a Figura 1(a). Pede-se para calcular o volume da pirâmide $VABC$.

Como sabemos, o volume da pirâmide é determinado pela terça parte do produto da área da base pela altura da pirâmide [4]. Sendo o segmento $\overline{VA}$ perpendicular ao triângulo ABC, $\overline{VA}$ é a altura da pirâmide. Temos então que calcular a área da base.

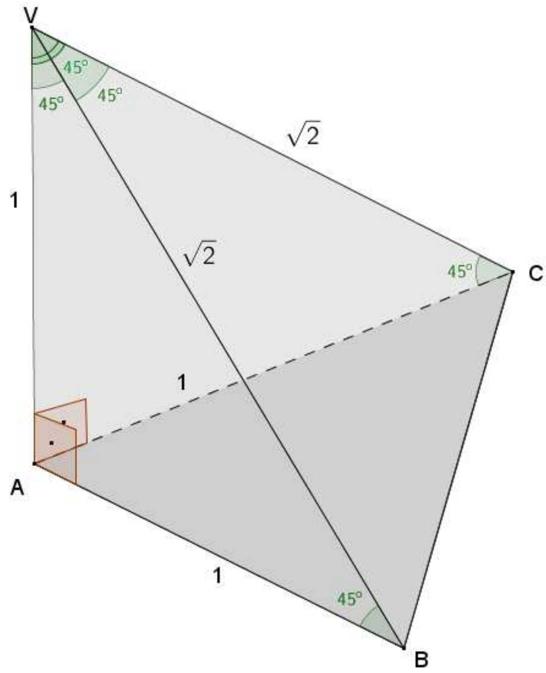
[1]harumi@uftpr.edu.br
[2]rudimarnos@utfpr.edu.b
[3]marcos.andre@ifsc.edu.br

Utilizando propriedades do triângulo isósceles e o Teorema de Pitágoras [3], concluímos que $\overline{AB} \equiv \overline{AC} = 1uc$ e $\overline{VB} \equiv \overline{VC} = \sqrt{2}uc$, como ilustra a Figura 1(b). Aplicando a Lei dos Cossenos [1] ao triângulo VBC, temos que

$$BC = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{4 - \sqrt{8}}uc. \tag{1}$$



(a)



(b)

Figura 1: Pirâmide do problema motivador: (a) dados iniciais; (b) dados complementares.

Antes de calcularmos a área do triângulo ABC, seria possível escrevermos a medida do lado $\overline{BC}$ (1), dada por um radical duplo, como uma soma (ou diferença) de radicais simples? [9, 10]

2 Escrevendo radicais duplos como radicais simples

Queremos determinar as relações que possibilitam a transformação

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}, \tag{2}$$

sendo A, B, a, $b \in \mathbb{Q}_+^*$, com $A^2 > B$ e não sendo B um quadrado perfeito. Elevando os membros da igualdade (2) ao quadrado, obtemos

$$A \pm \sqrt{B} = a + b \pm 2\sqrt{ab}. \tag{3}$$

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0557

Comparando os lados da igualdade (3), temos que

$$\left\{\begin{array}{l} A = a + b \\ \sqrt{B} = 2\sqrt{ab} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a + b = A \\ ab = \dfrac{B}{4} \end{array}\right. . \tag{4}$$

As igualdades em (4) mostram que a e b são as raízes da equação quadrática

$$x^2 - Ax + \frac{B}{4} = 0,$$

ou seja,

$$x_1 = a = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

e

$$x_2 = b = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}.$$

Como $a > b$, o lado direito da Equação (2) é um número real positivo. A condição $A^2 > B$, imposta inicialmente, garante que o lado esquerdo da Equação (2) também é um número real positivo. Essas condições eliminam as "raízes estranhas" que podem ser obtidas ao se elevar uma equação como (2) ao quadrado, como discutido em Lima et al [7].

Assim, podemos reescrever a igualdade (2) como

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}. \tag{5}$$

Logo, o radical duplo pode ser transformado em uma soma (ou diferença) de radicais simples se, em (5), $A^2 - B$ for um quadrado perfeito, com as condições anteriormente impostas a A e B.

Retornando ao problema geométrico motivador, constatamos que a medida (1) não pode ser reescrita como uma diferença de radicais simples, uma vez que $A = 4$ e $B = 8$ implicam em $A^2 - B = 8$, o qual não é um quadrado perfeito.

Dessa forma, aplicando o Teorema de Heron [3, 8] ao triângulo ABC, obtemos para a área do triângulo ABC e para o volume da pirâmide $VABC$, respectivamente,

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2} - 2}ua, \tag{6}$$

$$V_{VABC} = \frac{1}{6}\sqrt{2\sqrt{2} - 2}uv. \tag{7}$$

As medidas (6) e (7) também são dadas por radicais duplos. Como $A = -2 < 0$, não podemos empregar a transformação (5), uma vez que $A^2 - B = -4$ e $\sqrt{A^2 - B} = \sqrt{-4} = 2i$. Contudo, seria possível usarmos a relação (5) para calcularmos a raiz quadrada de um número complexo? [5, 9]

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0557

Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

3 Calculando a raiz quadrada de um número complexo

Consideremos $w \in \mathbb{C}$, onde $\mathbb{C}$ denota o conjunto dos números complexos [1, 2, 6], tal que $w^2 = z = a \pm bi$, sendo $i = \sqrt{-1}$ a unidade imaginária e $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$. Assim, utilizando a transformação (5), temos que

$$\begin{aligned} w = \pm\sqrt{z} = \pm\sqrt{a \pm bi} &= \pm\sqrt{a \pm b\sqrt{-1}} = \pm\sqrt{a \pm \sqrt{-b^2}}, \\ w &= \pm\left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - (-b^2)}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - (-b^2)}}{2}}\right), \\ w &= \pm\left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Como $\sqrt{a^2 + b^2}$ é o módulo do número complexo z [1,2,6], denotado por $|z|$, podemos reescrever a igualdade (8) como

$$\begin{aligned} w = \pm\sqrt{z} &= \pm\left(\sqrt{\frac{a + |z|}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - |z|}{2}}\right), \\ w &= \pm\left(\sqrt{\frac{|z| + a}{2}} \pm \sqrt{\frac{(-1)\,(|z| - a)}{2}}\right), \\ w &= \pm\left(\sqrt{\frac{|z| + a}{2}} \pm \sqrt{\frac{|z| - a}{2}}\; i\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Se $|z|$ for um número racional, o número complexo w (9) terá as partes real e imaginária dadas por radicais simples.

Apliquemos agora a relação (9) para solucionar quatro problemas, sendo os dois primeiros propostos em [9] e o quarto um problema interdisciplinar.

3.1 Problemas aplicados

Problema 1: Calcular $\sqrt{5 + 12i}$.

Sendo $z = 5 + 12i$, temos $a = 5$ e $b = 12$. Logo,

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{5^2 + 12^2} = 13, \\ \sqrt{z} = \sqrt{5 + 12i} &= \pm\left(\sqrt{\frac{13 + 5}{2}} + \sqrt{\frac{13 - 5}{2}} i\right) \\ &= \pm\left(\sqrt{9} + \sqrt{4} i\right) \\ &= \pm(3 + 2i). \end{aligned}$$

Problema 2: Calcular as raízes x_1 e x_2 da equação $x^2 - (4-2i)x + (11-10i) = 0$.

$$\begin{aligned}
\Delta &= [-(4-2i)]^2 - 4(1)(11-10i) \\
&= 16 - 16i - 4 - 44 + 40i \\
&= -32 + 24i \\
z &= -32 + 24i,\ a = -32,\ b = 24 \\
|z| &= \sqrt{(-32)^2 + 24^2} = \sqrt{1600} = 40 \\
\sqrt{z} &= \sqrt{-32+24i} = \pm\left(\sqrt{\frac{40-32}{2}} + \sqrt{\frac{40+32}{2}}i\right) \\
&= \pm\left(\sqrt{4} + \sqrt{36}i\right) \\
&= \pm(2+6i) \\
x &= \frac{(4-2i) \pm (2+6i)}{2} \\
x_1 &= \frac{6+4i}{2} = 3+2i \\
x_2 &= \frac{2-8i}{2} = 1-4i
\end{aligned}$$

Problema 3: Solucionar a equação $w^2 + 3i = 0$.

$$\begin{aligned}
w^2 &= -3i \Rightarrow w = \sqrt{-3i} \\
z &= -3i,\ a = 0,\ b = 3 \\
|z| &= \sqrt{3^2} = 3 \\
\sqrt{z} &= \sqrt{-3i} = \pm\left(\sqrt{\frac{3+0}{2}} - \sqrt{\frac{3-0}{2}}i\right) \\
&= \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i\right) \\
&= \pm\left(\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i\right) \\
w_1 &= \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i \\
w_2 &= -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i
\end{aligned}$$

Problema 4: No circuito ilustrado na Figura 2, a potência total sobre a impedância

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0557

$Z = (23 + 7j)\Omega$ é $S = (2 - 2j)VA$. Qual é a diferença de potencial U, em volts, entre os terminais A e B?

Figura 2: Circuito elétrico.

A fórmula que relaciona S, U e Z em circuitos elétricos é $S = \dfrac{U^2}{Z}$. Assim:

$$\begin{aligned}
&U = \sqrt{SZ};\\
&U = \sqrt{(2-2j)(23+7j)};\\
&U = \sqrt{60-32j};\\
&U = \sqrt{\frac{|(60-32j)|+60}{2}} - \sqrt{\frac{|(60-32j)|-60}{2}}j;\\
&U = \sqrt{\frac{68+60}{2}} - \sqrt{\frac{68-60}{2}}j;\\
&U = (8-2j)V.
\end{aligned}$$

Observação 3.1. *Simbologia:*

- *S: potência em Volt-ampéres (VA);*
- *U: diferença de potencial em Volts (V);*
- *Z: impedância em Ohms (Ω);*
- *j: unidade imaginária (em circuitos elétricos se utiliza i para representar a intensidade de corrente elétrica).*

4 Conclusões

Enquanto professores da Educação Básica, é importante associarmos os conteúdos estudados em sala de aula, contextualizando-os sempre que possível. Mostramos neste artigo algumas relações entre números complexos e radicais duplos, enfatizando as conexões entre a Geometria e a Álgebra e aplicando as propriedades dos radicais em um problema interdisciplinar. Destacamos que a forma proposta para calcular a raiz quadrada de um número complexo é mais simples do que empregar a Segunda Fórmula de Moivre [6], uma vez que não dependemos do argumento do número complexo.

Referências

[1] M. P. Carmo, A. C. Morgado and E. Wagner. *Trigonometria e números complexos*. Coleção do Professor de Matemática, 3 ed., SBM, Rio de Janeiro, 2005.

[2] R. Courant and H. Robbins. *What is Mathematics?* 2nd ed., Oxford University Press, New York, 1996.

[3] O. Dolce and J. N. Pompeo. *Geometria plana*. Coleção Fundamentos de Matemática Elementar, 7 ed., v. 9, Atual, São Paulo, 1993.

[4] O. Dolce and J. N. Pompeo. *Geometria espacial: posição e métrica*. Fundamentos de Matemática Elementar, 7 ed., v. 10, Atual, São Paulo, 2013.

[5] C. S. Guimarães. *Matemática em nível IME/ITA*. Vestseller, São José dos Campos, 2008.

[6] G. Iezzi. *Complexos, polinômios, equações*. Fundamentos de Matemática Elementar, 6 ed., v. 6, Atual, São Paulo, 1993.

[7] E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner and A. C. Morgado. *A matemática do ensino médio*. Coleção do Professor de Matemática, v. 4, SBM, Rio de Janeiro, 2007.

[8] R. L. Nós, O. H. Saito and C. A. M. Oliveira, Os teoremas de Stewart e de Heron e a demonstração nas aulas de matemática. In Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 3, n. 1, 2015.

[9] M. A. Santos, Dos números complexos aos quatérnions: desenvolvimento algébrico, interpretação geométrica e aplicações. Dissertação de Mestrado, UTFPR, 2014.

[10] J. S. e Silva and J. D. S. Paulo. *Compêndio de Álgebra*. Tomo II. Livraria Popular de Francisco Franco, Lisboa, 1969.

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0557