Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Heurística e algoritmo exato ceiling point na resolução de problemas de programação linear inteira

Cristina Teruko Ota[1]
Washington Alves de Oliveira[2]
Antonio Carlos Moretti[3]
Faculdade de Ciências Aplicadas, FCA, UNICAMP, Limeira, SP

1 Introdução

Os problemas de programação linear inteira (PLI) são, em geral, computacionalmente caros de serem resolvidos. Diversas abordagens exatas e heurísticas têm sido propostas na tentativa de diminuir o tempo computacional de resolução. Em 1991 e 1992, Saltzaman e Hillier [1, 2] introduzem, respectivamente o algoritmo exato ceiling points (XCPA) e a heurística ceiling points (HCPA) para resolver a forma pura de um PLI. Eles definem um conjunto de pontos denominados ceiling points e mostram a sua relação com as soluções factíveis e ótimas de um PLI. Toda solução ótima de um PLI, cuja região factível é não vazia e limitada, são 1-ceiling points factíveis. Em termos gerais, um ceiling point pode ser entendido como uma solução deitada sobre ou próxima da fronteira da região definida pelas restrições do PLI relaxado (PL). Este trabalho tem o objetivo de estudar e extrapolar a definição de ceiling point para problemas de corte de estoque (PCE). Utilizando o *software* de modelagem AIMMS com o Solver Cplex, uma versão modificada dos XCPA e HCPA estão sendo implementados para resolver e comparar com a literatura do PCE.

2 Teoria

Considere o problema linear inteiro (P) $\{\text{Max } c^T x | Ax \leq b,\ x \geq 0 \text{ e } x \text{ inteiro}\}$. Os dados $\{A, b, c\}$ são números racionais irrestritos de sinal. Em [1] um ceiling point (CP) é definido para cada restrição (i) de (P), ou seja, um vetor inteiro x é CP em relação a restrição (i) se ele satisfaz: 1) $a_i^T x \leq b_i$ e 2) modificando algum componente de x para $+1$ ou -1, resulta em uma solução que viola esta restrição, ou seja, para algum $j = 1, \ldots, n$, $a_i^T x + |a_{ij}| > b_i$. Além da definição de ceiling point, é necessário uma segunda definição para ceiling point factível. Considere a região factível $RF = \{x \geq 0 \mid Ax \leq b\}$ do (PL), um vetor inteiro x é ceiling point em relação à região factível, denotamos por CP(RF),

[1]c101905@dac.unicamp.br
[2]washington.oliveira@fca.unicamp.br
[3]moretti@ime.unicamp.br

se ele satisfaz: 1) $x \in RF$ e 2) para cada $j = 1, \ldots, n$, existe i tal que $a_i^T x + |a_{ij}| > b_i$. Um CP(RF) desenvolve um papel importante para (P) análogo a um vértice do (LP). LEMA: *Todo ponto extremo do casco convexo das soluções inteiras factíveis de (P) é um CP(RF).* TEOREMA: *Suponha que o conjunto de soluções viáveis de (P) é não vazio e limitado. Então existe uma solução ótima para (P) o qual é CP(RF).*

Identificar um CP(RF) é computacionalmente difícil pois as condições requerem que uma restrição seja violada como resultado de aumentar ou diminuir cada componente da solução. Uma forma de contornar esta dificuldade é limitar o número de componentes a serem analisadas. Para isso, apenas um subconjunto de direções são verificadas. O termo 1-CP(i) refere-se a um ceiling point no qual ao percorrer uma unidade de passo para o hiperplano da restrição (i) em no máximo uma direção, resulta em solução infactível. Suponha que exista um algoritmo para encontrar os 1-CP(i)s com respeito a uma dada restrição (i). Então, é possível mostrar que para resolver (P) nós precisamos aplicar este algoritmo no máximo uma vez para cada restrição funcional e de não-negatividade e, ainda, que é preciso pesquisar por 1-CP(i)s em apenas um subconjunto de todas as restrições com o objetivo de obter pelo menos uma solução ótima.

O algoritmo heurístico estudado inicia a partir de uma solução $\bar{x}$ do (LP), ele fornece o conjunto de restrições ativas em $\bar{x}$ ($\overline{FR}$) e o conjunto $\{d^1, d^2, \ldots\}$ das direções extremas normalizadas definindo o cone $\overline{FR}$. Este é obtido a partir do método Simplex para o (LP), utilizando a matriz básica. Em seguida, dada a estrutura da região factível próxima de $\bar{x}$, definida pelos hiperplanos das restrições ativas em $\bar{x}$ e as direções extremas originadas de $\bar{x}$, o algoritmo busca por 1-ceiling point com respeito a uma restrição ativa particular. Para a localização do 1-ceiling point, o algoritmo realiza uma busca por um hiperplano que tenha menor soma das razões ρ_k (razão de alteração na função objetiva por unidade de passo). Após a movimentação a partir do ponto, arredonda-se os componentes não inteiros de maneira que esta solução seja factível pelo menos em relação à restrição de busca. Verifica-se então se a nova solução inteira é factível e 1-CP(RF). Caso seja factível, mas não seja 1-ceiling point em relação a nenhuma outra restrição, então a última fase do HCPA melhorará a solução inteira alterando uma ou duas componentes da solução atual.

3 Resultados e conclusões

Testes numéricos promissores estão sendo realizados. O próximo passo é calibrar o procedimento de busca dos 1-ceiling points. No entanto, a própria complexidade teórica do tema já justifica o estudo em questão. Toda teoria está sendo reescrita para o PCE. Agradecemos à Faepex-UNICAMP pelo apoio financeiro.

Referências

[1] Robert M. Saltzman and Frederick S. Hillier. An exact ceiling point algorithm for general integer linear programming. *Naval Research Logistics*, 38:53–69, 1991.

[2] Robert M. Saltzman and Frederick S. Hillier. A heuristic ceiling point algorithm for general integer linear programming. *Management Science*, 38(2):263–283, 1992.

