Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

A Samambaia de Barnsley

Fabio A. Dorini[1]
Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, Curitiba, PR
Leyza B. Dorini[2]
Departamento Acadêmico de Informática, UTFPR, Curitiba, PR
Júlio C. S. Schwingel[3]
Departamento de Matemática, Colégio Estadual Prof. Nilo Brandão, Curitiba, PR

Resumo. Este trabalho objetiva apresentar as ideias matemáticas principais da Samambaia de Barnsley, um fractal que recria uma imagem que assemelha-se a uma folha de samambaia da variedade *Black Spleenwort* e tem como base quatro transformações afins elementares.

Palavras-chave. Samambaia de Barnsley, Fractais, Matlab.

1 Introdução

Fractais aproximados (ou pseudo-fractais) apresentam uma estrutura auto-similar ao longo de uma extensa, porém finita, faixa de escalas de observação. Este é o caso das samambaias, cujos folíolos são semelhantes, mas não idênticos, à folha como um todo. Neste contexto, fractais podem ser considerados representações abstratas de estruturas reais presentes na natureza [2, 3].

Este trabalho objetiva, através de uma matemática que pode ser assimilada por estudantes e professores do Ensino Médio, compreender as ideias principais do fractal denominado *Samambaia de Barnsley*. Além disso, são explorados os principais pontos de sua implementação computacional tomando-se como base os sistemas de funções iteradas, os quais geram figuras fractais através da repetição em escala de uma mesma figura [1].

2 A Samambaia de Barnsley

Na construção da Samambaia de Barnsley por meio de um sistema de funções iteradas, um ponto do plano é repetidamente transformado por meio de quatro transformações afins, denotadas aqui por T_1, T_2, T_3 e T_4. Elas possuem diferentes probabilidades de ocorrência

[1]fabio.dorini@gmail.com
[2]leyza@dainf.ct.utfpr.edu.br
[3]julioschwingel@gmail.com [aluno do Profmat/UTFPR/Curitiba - bolsista CAPES]

Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

em cada etapa do processo e são definidas por:

$$\begin{aligned} T_k : \mathbf{R}^2 &\to \mathbf{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto A_k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b_k, \end{aligned} \tag{1}$$

em que

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{pmatrix},\ b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix},$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{pmatrix},\ b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.44 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{pmatrix},\ \text{e}\ b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

As probabilidades de ocorrência das transformações T_1, T_2, T_3 e T_4 no processo iterativo de geração da Samambaia de Barnsley são $p_1 = 85\%$, $p_2 = 7\%$, $p_3 = 7\%$ e $p_4 = 1\%$, respectivamente.

Em outras palavras, o algoritmo proposto por Barnsley [1] pode ser definido da seguinte maneira: (a) a cada uma das transformações afins T_k é atribuída uma probabilidade de aplicação p_k, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$; (b) escolhe-se um ponto inicial $x_0 \in \mathbb{R}^2$ qualquer; (c) aplica-se as transformações T_k de forma aleatória, de acordo com sua probabilidade de ocorrência. Isto é, dado $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, e $k \in \{1, 2, 3, 4\}$,

$$x_{n+1} = T(x_n), \qquad \text{Prob}\{T = T_k\} = p_k, \tag{2}$$

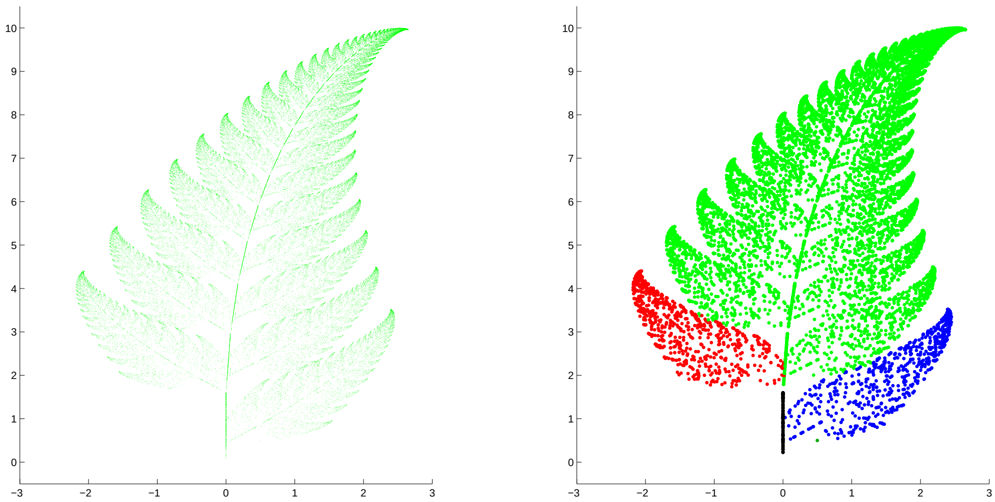
em que $\text{Prob}\{T = T_k\}$ representa a probabilidade de T assumir a transformação afim T_k (na iteração em questão). O código seguinte (em Matlab, adaptado de [4]) fornece uma aproximação da Samambaia de Barnsley.

```
shg; clf reset; set(gcf,'color','white')
x = [0.5; 0.5]; hold on; plot(x(1),x(2),'.','markersize',1,'color','k');
p = [.85 .92 .99 1.00];
A1 = [ .85  .04; -.04  .85]; b1 = [0; 1.6];
A2 = [ .20 -.26;  .23  .22]; b2 = [0; 1.6];
A3 = [-.15  .28;  .26  .24]; b3 = [0; .44];
A4 = [   0    0;    0  .16];
for k=1:70000
    r = rand;
    if r < p(1)
        x = A1*x + b1; plot(x(1),x(2),'.','markersize',1,'color','g')
    elseif r < p(2)
        x = A2*x + b2; plot(x(1),x(2),'.','markersize',1,'color','g')
    elseif r < p(3)
        x = A3*x + b3; plot(x(1),x(2),'.','markersize',1,'color','g')
    else
        x = A4*x;      plot(x(1),x(2),'.','markersize',1,'color','g')
    end
end
axis([-3 3 -0.5 10.5]);
```

Resultados teóricos mais avançados (fora do escopo deste trabalho) garantem que, independentemente do x_0 escolhido, a partir de um certo $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande os pontos da sequência $(x_n)_{n \geq N}$ definidos em (2) estão próximos do conjunto denominado Samambaia de Barnsley [1, 2].

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0562

A Fig. 1(a) ilustra a saída da implementação acima para 70.000 iterações . A Fig 1(b) considera 10.000 iterações (trocar 70.000 por 10.000 na linha 8 do código), associando-se a cada ponto gerado uma cor correspondente à transformação utilizada: verde para T_1; vermelho para T_2 (trocar 'g' por 'r' na linha 13 do código); azul para T_3 (trocar 'g' por 'b' na linha 15); e preto para T_4 (trocar 'g' por 'k' na linha 17).



(a) (b)

Figura 1: Ilustrações da Samambaia de Barnsley.

Percebe-se que os pontos gerados por T_1 são responsáveis pela formação dos ramos cada vez menores (corpo e ponta da samambaia), os gerados por T_2 formam o primeiro ramo esquerdo, os gerados por T_3 formam o primeiro ramo direito, e os pontos gerados por T_4 formam a haste da samambaia. O algoritmo proposto por Barnsley recria uma imagem que assemelha-se a uma folha de samambaia da variedade *Black Spleenwort* [2].

3 Um pouco da matemática da Samambaia de Barnsley

As transformações em (1) são transformações afins, *ie*, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, da forma

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + e \\ cx + dy + f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}, \tag{3}$$

em que a, b, c, d, e, e f são números reais.

Rotações, contrações, dilatações, reflexões, translações, dentre outras, ou composições destas, são exemplos clássicos de transformações afins. Outra propriedade importante é que levam retas em retas e preservam razão entre segmentos no plano.

Não é difícil mostrar que toda transformação afim pode ser decomposta como segue:

$$\begin{aligned} &T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ &\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\theta & -s\sin\phi \\ r\sin\theta & s\cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{4}$$

em que r e s são fatores de contração/dilatação, e θ e ϕ são ângulos de rotação da transformação T. O vetor $(e, f)^t$ associa uma translação à T.

A Tabela 1 apresenta os valores particulares de r, s, θ, ϕ, e, e f associados às transformações T_1, T_2, T_3 e T_4 da definição da Samambaia de Barnsley em (1).

Tabela 1: Parâmetros das transformações afins utilizadas na Samambaia de Barnsley.

Transformação	r	θ (graus)	s	ϕ (graus)	e	f	p (probabilidade)
T_1	0.85	-2.5	0.85	-2.5	0	1.6	0.85
T_2	0.3	49	0.34	49	0	1.6	0.07
T_3	0.3	120	0.37	-50	0	0.44	0.07
T_4	0	0	0.16	0	0	0	0.01

Observe que as transformações afins T_1, T_2, T_3 e T_4 são em essência composições de rotações, contrações, reflexões e translações. De fato, T_1 realiza uma rotação de 2.5° no sentido horário, seguida de contração com fator 0.85 e translação vertical de $b_1 = (0, 1.6)^t$; T_2 realiza uma rotação de 49° no sentido antihorário seguida de contração com fator 0.3 na direção do eixo x, e rotação de 49° no sentido antihorário seguido de contração com fator 0.34 na direção y. Finalmente, uma translação vertical de $b_2 = (0, 1.6)^t$; T_3 realiza uma rotação de 120° no sentido antihorário seguido de contração com fator 0.3 na direção x, e rotação de 50° no sentido horário seguido de contração com fator 0.37 em y. Uma translação vertical de $b_2 = (0, 0.44)^t$ é finalmente aplicada. Fica evidente uma componente reflexiva em T_3; e T_4 realiza uma projeção sobre o eixo y, seguido de uma contração com fator 0.16.

Proposição 3.1. *Considere o conjunto* $\Omega = \left\{||Ax||_2/||x||_2,\ x \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0\right\} \subset [0, +\infty)$, *em que* $A = (a_{ij})$ *é uma matriz* 2×2 *de números reais. Então,* Ω *possui máximo.*

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}\Omega &= \left\{||Ax||_2/||x||_2,\ x \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0\right\} = \left\{||A\,(x/||x||_2)||_2\,,\ x \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0\right\} = \\ &= \left\{||Ay||_2,\ y \in \mathbb{R}^2,\ ||y||_2 = 1\right\} = \left\{\left|\left|A\,(\cos\theta, \sin\theta)^t\right|\right|_2,\ \theta \in [0, 2\pi]\right\} = \\ &= \left\{\sqrt{(a_{11}\cos\theta + a_{12}\sin\theta)^2 + (a_{21}\cos\theta + a_{22}\sin\theta)^2},\ \theta \in [0, 2\pi]\right\}.\end{aligned} \tag{5}$$

Como a função $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(\theta) = \sqrt{(a_{11}\cos\theta + a_{12}\sin\theta)^2 + (a_{21}\cos\theta + a_{22}\sin\theta)^2} \tag{6}$$

é contínua (pois é composição de funções elementares contínuas), segue do *Teorema de Weierstrass* que f assume valor máximo em algum ponto do intervalo $[0, 2\pi]$.
Deste modo, existe $\tilde{\theta}$ em $[0, 2\pi]$ tal que $f(\tilde{\theta}) = \max \Omega$. □

Da Prop. 3.1 segue que se A é uma matriz 2×2 de números reais, então existem uma constante real $K > 0$ e $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$ tais que $||Ax||_2 \leq K||x||_2$ e $||A\tilde{x}||_2 = K||\tilde{x}||_2$, para todo $x \neq 0$ em $\mathbb{R}^2$. Assim, para as tranformações T_1, T_2, T_3 e T_4 em (1) é possível afirmar que

$$||T_k(x) - T_k(y)||_2 = ||(A_k x + b_k) - (A_k y + b_k)||_2 = ||A_k(x-y)||_2 \leq K_k \, ||x-y||_2 \,, \quad (7)$$

em que K_k, $k \in \{1,2,3,4\}$, é a constante dada pela referida proposição, isto é,

$$K_k = \max\left\{ \sqrt{\left(a_{11}^k \cos\theta + a_{12}^k \sin\theta\right)^2 + \left(a_{21}^k \cos\theta + a_{22}^k \sin\theta\right)^2};\;\; 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}, \quad (8)$$

em que $A_k = (a_{ij}^k)$. Com o auxílio do software Matlab, cujo script é o que segue,

```
A = [0.85 0.04; -0.04 0.85];
t = [0:0.0001:2*pi];
K = max(sqrt((A(1,1)*cos(t)+A(1,2)*sin(t)).^2+(A(2,1)*cos(t)+A(2,2)*sin(t)).^2));
```

obteve-se os seguintes valores aproximados para as constantes (de contração), K_k:

$$K_1 \approx 0.851, \quad K_2 \approx 0.341, \quad K_3 \approx 0.380, \quad \text{e} \quad K_4 \approx 0.160. \quad (9)$$

Portanto, como cada transformação afim em (1) é uma contração, esta terá um único ponto atrator, isto é, independentemente do x_0 escolhido este será atraído por um dos quatro atratores definidos pelas transformações T_1, T_2, T_3 e T_4. De fato, para cada T_k, $k \in \{1,2,3,4\}$ fixo, e denotando como I_2 a matriz identidade de ordem 2, é verdade que

$$\begin{aligned}
x_1^k &= T_k(x_0) = A_k x_0 + b_k, \\
x_2^k &= T_k(x_1^k) = A_k\left(A_k x_0 + b_k\right) + b_k = A_k^2 x_0 + [A_k + I_2]b_k, \\
x_3^k &= T_k(x_2^k) = A_k\left(A_k^2 x_0 + [A_k + I]b_k\right) + b_k = A_k^3 x_0 + \left[A_k^2 + A_k + I_2\right] b_k, \\
&\;\vdots \\
x_n^k &= T_k(x_{n-1}^k) = A_k^n x_0 + \left[A_k^{n-1} + A_k^{n-2} + \cdots + A_k^2 + A_k + I_2\right] b_k. \quad (10)
\end{aligned}$$

Fazendo $S_n^k = A_k^{n-1} + A_k^{n-2} + \cdots + A_k^2 + A_k + I_2$, segue que

$$A_k S_n^k = S_n^k A_k = A_k^n + A_k^{n-1} + \cdots + A_k^3 + A_k^2 + A_k. \quad (11)$$

Assim,

$$S_n^k\,(I_2 - A_k) = S_n^k - A_k S_n^k = I_2 - A_k^n. \quad (12)$$

Já que os determinates $\det(I_2 - A_1) \approx 0.02$, $\det(I_2 - A_2) \approx 0.68$, $\det(I_2 - A_3) \approx 0.80$ e $\det(I_2 - A_4) \approx 0.84$ são ambos não nulos, segue que as matrizes $(I_2 - A_k)$, $k \in \{1,2,3,4\}$, são inversíveis. Portanto, x_n^k em (10) pode ser apresentada como

$$x_n^k = T_k^n(x_0) = A_k^n x_0 + (I_2 - A_k^n)\,(I_2 - A_k)^{-1}\, b_k, \quad k \in \{1,2,3,4\}. \quad (13)$$

Usando o fato que A_k, $k \in \{1,2,3,4\}$, é uma matriz de contração com fator K_k, segue que, para todo $x \in \mathbb{R}^2$ fixo,

$$\begin{aligned}
0 \leq ||A_k^n x||_2 = ||A_k\; A_k^{n-1}x||_2 \leq K_k\; ||A_k^{n-1}x||_2 = K_k\; ||A_k\; A_k^{n-2}x||_2 \leq \\
\leq K_k^2\; ||A_k^{n-2}x||_2 \leq \ldots \leq K_k^{n-1}\; ||A_k x||_2 \leq K_k^n\; ||x||_2. \quad (14)
\end{aligned}$$

Como $0 \leq K_k < 1$ e $x \in \mathbb{R}^2$ é fixo, segue que $K_k^n \, ||x||_2$ vai para zero quando n tende ao infinito. Do *Teorema do Confronto* segue, então, que

$$\lim_{n\to\infty} ||A_k^n x||_2 = 0, \tag{15}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^2$ fixo. Em particular, as escolhas $x = (1,0)^t$ e $x = (0,1)^t$ em (15) nos permitem concluir que

$$\lim_{n\to\infty} A_k^n = 0 \quad \text{(matriz nula)}. \tag{16}$$

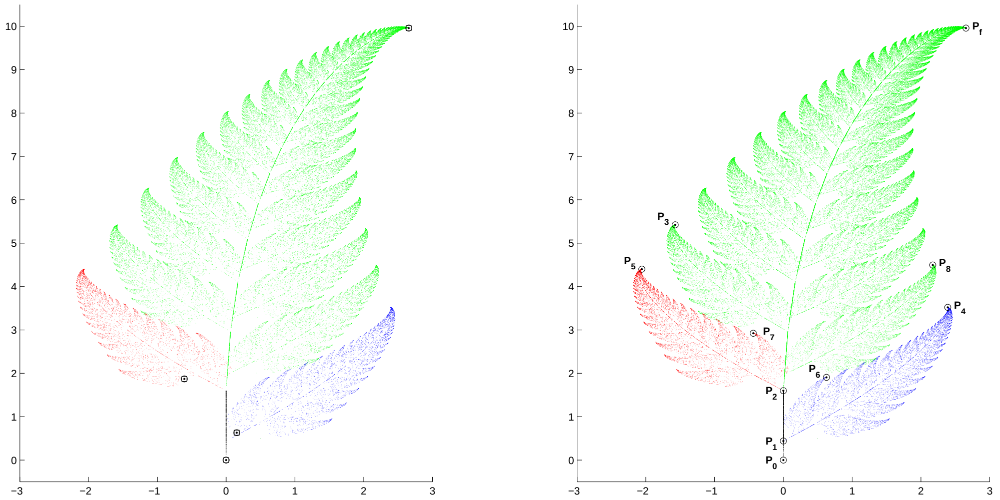
Usando (16) em (13) implica que

$$\lim_{n\to\infty} x_n^k = \lim_{n\to\infty} \left[A_k^n x_0 + (I_2 - A_k^n)\,(I_2 - A_k)^{-1}\, b_k \right] = (I_2 - A_k)^{-1}\, b_k. \tag{17}$$

Os limites em (17), atratores de T_k, $k \in \{1,2,3,4\}$, são dados por

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_n^1 &= (I_2 - A_1)^{-1}\, b_1 \approx \begin{pmatrix} 2.655 \\ 9.958 \end{pmatrix}, & \lim_{n\to\infty} x_n^2 &= (I_2 - A_2)^{-1}\, b_2 \approx \begin{pmatrix} -0.608 \\ 1.872 \end{pmatrix} \\ \lim_{n\to\infty} x_n^3 &= (I_2 - A_3)^{-1}\, b_3 \approx \begin{pmatrix} 0.154 \\ 0.631 \end{pmatrix}, & \lim_{n\to\infty} x_n^4 &= (I_2 - A_4)^{-1}\, b_4 \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{18}$$

A sequência $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ em (10) é chamada *órbita* do referido atrator. A Fig. 2(a) ilustra os quatros atratores (quadrados pretos) das transformações T_k, $k \in \{1,2,3,4\}$. Observe que os pontos gerados por T_1 são atraídos para a região da ponta da samambaia, T_2 e T_3 atraem para as regiões no entorno dos caules das primeiras folhas (vermelho e azul, respectivamente), e T_4 atrai para a haste da samambaia.



(a) (b)

Figura 2: Ilustração de pontos característicos importantes da Samambaia de Barnsley

Um fato importante é que uma transformação afim T é totalmente determinada pela imagem de três pontos não colineares Q_1, Q_2 e Q_3 do plano. De fato, fazendo $Q_i = (x_i, y_i)$,

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0562

$T(Q_i) = (\bar{x}_i, \bar{y}_i)$, $i \in \{1,2,3\}$, os parâmetros a, b, c, d, e e f em (3) são as soluções dos sistemas de equações lineares seguintes:

$$\begin{cases} x_1 a + y_1 b + e = \bar{x}_1, \\ x_2 a + y_2 b + e = \bar{x}_2, \\ x_3 a + y_3 b + e = \bar{x}_3, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_1 c + y_1 d + f = \bar{y}_1, \\ x_2 c + y_2 d + f = \bar{y}_2, \\ x_3 c + y_3 d + f = \bar{y}_3. \end{cases} \tag{19}$$

Estes sistemas de equações admitem solução única se, e somente se,

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \neq 0, \quad \text{ou} \quad \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \tag{20}$$

já que o determinante não muda se uma linha é subtraída de outra, ou $(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \neq 0$, isto é, Q_1, Q_2 e Q_3 são não colineares.

Este resultado é fundamental para a obtenção das transformações afins T_k em (1):

(a) T_1 leva a samambaia toda na parte verde, Fig. 2(b), conduzindo a ponta da samambaia nela mesma e as pontas das folhas vermelha e azul nas pontas das folhas verdes da esquerda e direita mais próximas, respectivamente. Isto é, $T_1(P_f) = P_f$, $T_1(P_5) = P_3$ e $T_1(P_4) = P_8$.

(b) T_2 leva a samambaia toda na sua folha vermelha, Fig. 2(b), conduzindo P_f em P_5, P_0 em P_2, e P_4 em P_7. Isto é, $T_2(P_f) = P_5$, $T_2(P_0) = P_2$ e $T_2(P_4) = P_7$.

(c) T_3 leva a samambaia toda na sua folha azul, Fig. 2(b), conduzindo P_f em P_4, P_0 em P_1, e P_4 em P_6. Isto é, $T_3(P_f) = P_4$, $T_3(P_0) = P_1$ e $T_3(P_4) = P_6$.

(d) T_4 leva a samambaia toda na região preta, caule da samambaia na Fig. 2(b), projetando todos os pontos da samambaia sobre o eixo y antes de aplicar uma contração. Isto é, $T_4(x,y) = (0, \xi y)$, $\xi \in \mathbb{R}$ fixo, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, e $T_4(x_f, y_f) = (0, \xi y_2)$, em que (x_f, y_f) e (x_2, y_2) são as coordenadas dos pontos P_f e P_2, respectivamente. A condição $T_4(x_f, y_f) = (0, \xi y_2)$ conduz a um fator de contração de 0.16.

Referências

[1] M. F. Barnsley and S. Demko, Iterated function systems and the global construction of fractals, *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A*, 399:243–275, 1985.

[2] M. F. Barnsley. *Fractals Everywhere*. Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1988.

[3] B. B. Mandelbrot. *Obtectos fractais: forma, acaso e dimensão*. Gradiva Publicações, Lisboa, 1991.

[4] C. Moler. *Experiments with MATLAB*. Electronic edition published by MathWorks, Inc., 2011. `https://www.mathworks.com/moler/exm/book.pdf`.

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0562