Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Torre de Hanói e Sequência de Fibonacci via Transformada Z

Roy Wilhelm Probst[1]
Simone Venturi[2]
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Curitiba, PR

Resumo. Nesse trabalho será apresentada a Transformada Z, que pode ser utilizada para resolver Equações de Diferenças. Essas equações aparecem em problemas que envolvem recorrências, como os tradicionais modelos da Torre de Hanói e da Sequência de Fibonacci. As Equações de Diferenças provenientes desses modelos serão resolvidas utilizando a Transformada Z ao invés da Indução Matemática e será mostrada a vantagem dessa abordagem. Isso mostra como esses modelos podem ser utilizados como motivação no ensino dessa transformada.

Palavras-chave. Torre de Hanói, Sequência de Fibonacci e Transformada Z.

1 Introdução

A Torre de Hanói e a Sequência de Fibonacci são exemplos clássicos de modelos envolvendo recorrências [4]. Esses modelos são exemplos tradicionais usados no ensino da técnica de demonstração conhecida como Indução Matemática. Uma desvantagem do uso da Indução Matemática é a necessidade de uma conjectura sobre a solução da recorrência. No exemplo da Torre de Hanói essa conjectura pode ser obtida intuitivamente sem dificuldade, mas no exemplo da Sequência de Fibonacci isso é praticamente inviável.

Uma alternativa para a resolução de recorrências é o uso da Transformada Z [2]. Essa transformada posse ser interpretada como a Transformada de Laplace discreta [3]. Assim como a Transforma de Laplace é a principal ferramenta para a resolução analítica de Equações Diferenciais Ordinárias, a Transformada Z é o equivalente para Equações de Diferenças (recorrências).

A seguir será apresentada a definição da Transformada Z e algumas de suas propriedades. Apenas com essas ferramentas será possível achar a solução das Equações de Diferenças provenientes dos modelos da Torre de Hanói e da Sequência de Fibonacci.

[1]rwprobst@gmail.com
[2]si_venturi@yahoo.com

2 Transformada Z

Nessa seção será feita uma breve introdução à Transformada Z e algumas de suas propriedades, conforme [1].

Dada uma sequência

$$\{x_n\} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\}, \tag{1}$$

a transformada Z dessa sequência é dada por:

$$\mathcal{Z}\{x_n\} = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = x_0 + \frac{x_1}{z} + \frac{x_2}{z^2} + \frac{x_3}{z^3} + \cdots \tag{2}$$

Dada uma constante $a \in \mathbb{R}$ e a sequência definida por $x_n = a^n$, a transformada de x_n é dada por:

$$X(z) = 1 + \frac{a}{z} + \frac{a^2}{z^2} + \frac{a^3}{z^3} + \cdots = 1 + \frac{a}{z} + \left(\frac{a}{z}\right)^2 + \left(\frac{a}{z}\right)^3 + \cdots, \tag{3}$$

que é a soma de uma progressão geométrica com primeiro termo igual a 1 e razão a/z. Calculando a soma dos termos dessa progressão geométrica:

$$X(z) = \frac{1}{1 - a/z} = \frac{z}{z - a}. \tag{4}$$

Logo:

$$\mathcal{Z}\{a^n\} = \frac{z}{z - a}. \tag{5}$$

Utilizando a propriedade de Linearidade dos somatórios, é possível demonstrar que a Transformada Z também possui essa propriedade. Assim, dados $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathcal{Z}\{x_n\} = X(z)$ e $\mathcal{Z}\{y_n\} = Y(z)$, pela propriedade da Linearidade:

$$\mathcal{Z}\{ax_n + by_n\} = aX(z) + bY(z). \tag{6}$$

A propriedade que permite utilizar a Transformada Z para a resolução de Equações de Diferenças é conhecida como propriedade da Translação (a demonstração e sua motivação pode ser encontrada em [5]). Dado $\mathcal{Z}\{x_n\} = X(z)$, pela propriedade da Translação:

$$\mathcal{Z}\{x_{n+k}\} = z^k \left[X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x_n z^{-n} \right]. \tag{7}$$

Utilizando apenas a transformada de a^n e as propriedades da Linearidade e Translação é possível resolver as Equações de Diferenças provenientes dos modelos da Torre de Hanói e da Sequência de Fibonacci.

3 Torre de Hanói

Dado um pilha de n discos e três pinos, o objetivo é mover a pilha de um pino para outro com a menor quantidade de movimentos. As únicas regras são: mover um disco por vez e não colocar um disco maior em cima de um menor.

Discos	Movimentos				
0	0			$=$	$2^0 - 1$
1	1	$=$	$0+1+0$	$=$	$2^1 - 1$
2	3	$=$	$1+1+1$	$=$	$2^2 - 1$
3	7	$=$	$3+1+3$	$=$	$2^3 - 1$
4	15	$=$	$7+1+7$	$=$	$2^4 - 1$
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
n	x_n			$=$	$2^n - 1?$

Tabela 1: Movimentos necessários para mover n discos

Uma análise da Tabela 1 parece sugerir que são necessários $2^n - 1$ movimentos para mover n discos. Essa conjectura está correta e será provada a seguir com o auxílio da transformada Z.

Seja x_n a quantidade de movimentos necessários para mover n discos. Para mover $n+1$ discos pode-se pensar em uma pilha de n discos em cima de um disco base. Assim, pensando recursivamente, pode-se mover a pilha de n discos com x_n movimentos, mover o disco base para o outro pino com um movimento e mover novamente a pilha de n discos para cima do disco base com mais x_n movimentos. Assim, a relação de recorrência entre x_{n+1} e x_n é:

$$x_{n+1} = x_n + 1 + x_n. \tag{8}$$

A condição inicial é $x_0 = 0$, pois, não há movimentos a serem feitos quando não há discos. Logo, a quantidade de movimentos x_n procurada deve resolver

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 2x_n + 1 \\ x_0 &= 0. \end{cases} \tag{9}$$

Dada a equação de diferenças

$$x_{n+1} = 2x_n + 1, \tag{10}$$

aplica-se a transformada em ambos os lados da igualdade:

$$\mathcal{Z}\{x_{n+1}\} = \mathcal{Z}\{2x_n + 1\}. \tag{11}$$

Utilizando as propriedades da Translação, da Linearidade e a transformada de 1, tem-se:

$$z[X(z) - x_0] = 2X(z) + \frac{z}{z-1}. \tag{12}$$

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0563

Substituindo $x_0 = 0$ e isolando $X(z)$:

$$X(z) = \frac{z}{(z-2)(z-1)}. \tag{13}$$

Utilizando o artifício de calcular a decomposição em frações parciais de $X(z)$ dividido por z, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{X(z)}{z} &= \frac{1}{(z-2)(z-1)} \\ &= \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-1} \\ &= \frac{A(z-1)+B(z-2)}{(z-2)(z-1)} \\ &= \frac{(A+B)z + (-A-2B)}{(z-2)(z-1)}. \end{aligned} \tag{14}$$

Igualando os numeradores, tem-se o sistema linear:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A - 2B = 1, \end{cases} \tag{15}$$

cuja solução é $A = 1$ e $B = -1$. Assim:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} \tag{16}$$

e portanto

$$X(z) = \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1}. \tag{17}$$

A solução procurada x_n é a transformada inversa de $X(z)$:

$$\begin{aligned} x_n &= \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} \\ &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1}\right\} \\ &= 2^n - 1. \end{aligned} \tag{18}$$

Logo, $x_n = 2^n - 1$ é a quantidade de movimentos necessários para mover n discos.

Existem várias lendas sobre a Torre de Hanói. Em uma lenda Hindu, o deus Brahma teria construído uma torre com 64 discos e faria um movimento por segundo. Segundo a lenda, o mundo desapareceria quando todos os discos fossem movidos, isto é, após $2^{64} - 1$ segundos. Felizmente, essa quantidade de tempo é aproximadamente 42 vezes a idade do universo...

Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

4 Sequência de Fibonacci

Os números de Fibonacci são dados pela sequência

$$\{f_n\} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}. \tag{19}$$

Começando por 0 e 1, cada termo subsequente corresponde a soma dos dois anteriores. Assim, a sequência é definida por:

$$\begin{cases} f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \\ f_0 = 0, f_1 = 1. \end{cases} \tag{20}$$

Para obter uma fórmula explícita para o n-ésimo número de Fibonacci a partir da equação

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \tag{21}$$

aplica-se a transformada em ambos os lados da igualdade:

$$\mathcal{Z}\{f_{n+2}\} = \mathcal{Z}\{f_{n+1} + f_n\}. \tag{22}$$

Utilizando as propriedades da Translação e da Linearidade:

$$z^2 \left[F(z) - f_0 - \frac{f_1}{z} \right] = z[F(z) - f_0] + F(z). \tag{23}$$

Substituindo $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$:

$$z^2 F(z) - z = zF(z) + F(z). \tag{24}$$

Isolando $F(z)$:

$$F(z) = \frac{z}{z^2 - z - 1}. \tag{25}$$

O polinômio no denominador possui duas raízes reais em:

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \tag{26}$$

logo pode ser escrito como:

$$z^2 - z - 1 = \left[z - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right] \left[z - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right]. \tag{27}$$

Calculando a decomposição em frações parciais de $F(z)$ dividido por z, tem-se:

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0563

Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

$$\begin{aligned} \frac{F(z)}{z} &= \frac{1}{z^2 - z - 1} \\ &= \frac{A}{z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{B}{z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}. \end{aligned} \tag{28}$$

e portanto

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{z}{z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{z}{z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \right]. \tag{29}$$

A solução procurada f_n é a transformada inversa de $F(z)$:

$$\begin{aligned} f_n &= \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} \\ &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{z}{z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{z}{z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right]^n. \end{aligned} \tag{30}$$

Pode-se reescrever a solução utilizando o número de ouro, pois uma das raízes de $z^2 - z - 1$ é o próprio número de ouro

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{31}$$

e a outra raíz é

$$1 - \varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \tag{32}$$

Assim,

$$f_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}} \tag{33}$$

é a fórmula procurada para o n-ésimo número de Fibonacci.

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0563

5 Conclusões

Nesse trabalho é apresentada a Transformada Z e como ela pode ser utilizada para resolver Equações de Diferenças. Entre os exemplos motivacionais para abordar o tema estão as recorrências provenientes da Torre de Hanói e da Sequência de Fibonacci. A resolução desses modelos são tradicionalmente apresentados utilizando a técnica de demonstração conhecida como Indução Matemática. Uma desvantagem do uso da Indução Matemática é a necessidade de uma conjectura sobre a solução da recorrência, o que não ocorre com a resolução apresentada nesse trabalho, via Transformada Z.

Embora a Transformada Z seja uma poderosa ferramenta para a resolução de Equações de Diferenças (equivalente ao uso da Transformada de Laplace para a resolução de Equações Diferenciais Ordinárias), ainda existem poucos textos didáticos sobre essa transformada na bibliografia. Em Língua Portuguesa, as únicas referências encontradas são livros técnicos de Engenharia, principalmente da área de Processamento de Sinais. Por serem publicações técnicas e não didáticas, a abordagem utilizada nesses livros é bastante limitada, sem preocupação com a profundidade de exemplos, das propriedades e suas demonstrações.

Buscando suprir essa falta de material didático em Língua Portuguesa, a Transformada Z é atualmente tema de uma Dissertação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Referências

[1] R. A. E. Attar. Lectures Notes on Z-Transform, *Lulu Press*, Alexandria, 2005.

[2] S. Elaydi. An Introduction to Difference Equations, *Springer*, San Antonio, 3 ed., 2005.

[3] A. C. Grove. An Introduction to the Laplace Transform and the z Transform, *Prentice Hall*, Inglaterra, 1991.

[4] A. C. Morgado e P. C. P. Carvalho. Matemática Discreta. *Coleção PROFMAT*, SBM, 2014.

[5] R. Vich. Z Transform Theory and Applications, *Kluwer Academic*, Praga, 1987.

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0563