Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Anamorfose catóptrica cilíndrica no ensino de Matemática

Olga Harumi Saito[1]
Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, Curitiba, PR
Claudio Iavorski[2]
Colégio Marista Paranaense, Curitiba, PR
Rudimar Luiz Nós[3]
Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, Curitiba, PR

Resumo. A anamorfose catóptrica cilíndrica é uma técnica de projeção que consiste na deformação de uma figura no plano e sua reconstituição em um sólido refletor. Essa técnica combina matemática e arte e pode ser explorada no ensino de conteúdos de Matemática, como sistemas de coordenadas, geometria plana e espacial, vetores, projeção, funções e trigonometria, possibilitando o planejamento de atividades interdisciplinares. Apresentamos neste trabalho o processo matemático da anamorfose cilíndrica, ou seja, a estratégia de cálculo dos pontos R da figura distorcida e dos pontos de incidência I dos pontos R no espelho cilíndrico refletor, assim como os resultados de uma oficina desenvolvida com estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Campo Largo, PR.

Palavras-chave. Sistemas de coordenadas, espelho cilíndrico, reflexão, reconstrução de imagens.

1 Introdução

O termo *anamorfose* deriva da palavra grega $\alpha\nu\alpha\mu o\rho\phi\omega\sigma\iota\varsigma$ (anamorphosis) e tem como significado reformação, retorno da forma, reiteração da forma, reversão da forma e formar de novo [3]. Essa técnica foi muito usada na pintura de murais nos séculos XV e XVI, principalmente para gerar efeitos de profundidade e dupla interpretação de imagens. Depois de um período no esquecimento, foi resgatada no século passado e um dos destaques é o húngaro István Orosz. A riqueza de detalhes em seus trabalhos, como ilustra a Figura 1, aguça a curiosidade de todos.

A anamorfose encanta não apenas amantes da arte, mas também matemáticos. Conhecida como "A Matemática do Disfarce", ela pode ser empregada para explorar conceitos físicos e matemáticos, como fazemos a seguir empregando a anamorfose catóptrica cilíndrica.

[1]harumi@uftpr.edu.br
[2]claudio-iavorski@hotmail.com
[3]rudimarnos@utfpr.edu.br

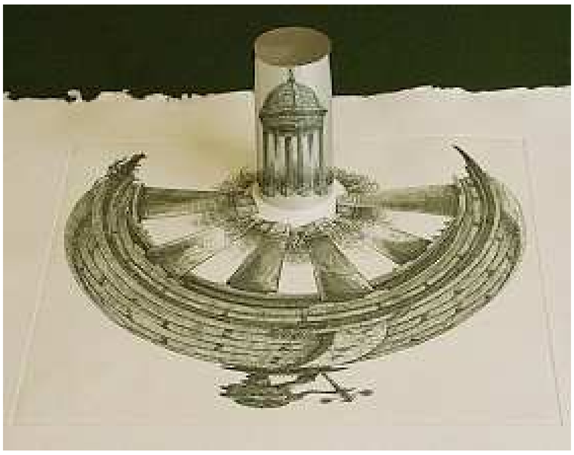
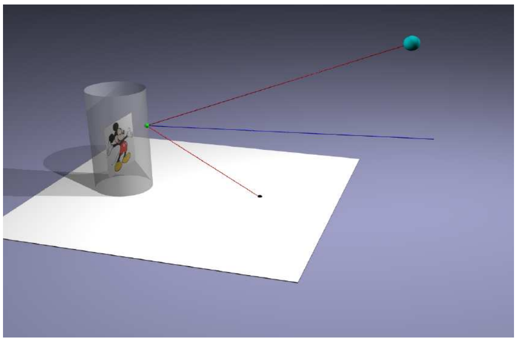


Figura 1: Obra de István Orosz [5].

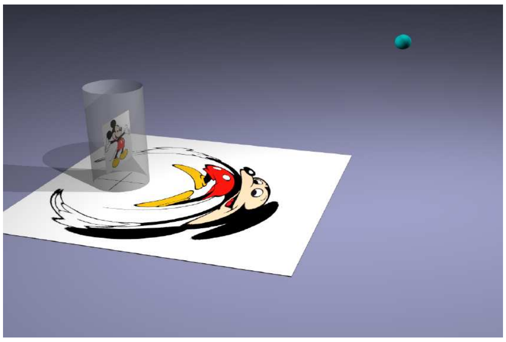
2 Anamorfose cilíndrica

Na anamorfose catóptrica, a reconstituição da imagem somente ocorre se utilizarmos um objeto para refletí-la adequadamente. Geralmente se utiliza um espelho cilíndrico, cônico ou piramidal, mas o espelho pode ser outro tipo de sólido refletivo [2,3]. A obra de István Orosz é um exemplo de anamorfose catóptrica que utiliza um cilindro como sólido refletor.

A matemática da anamorfose cilíndrica pode ser compreendida a partir da Figura 2. Nela, desejamos que um observador (ponto azul) veja os pontos R da imagem deformada no plano do personagem Mickey (Figura 2(b)) reconstituídos nos pontos P da figura original no cilindro (Figura 2(a)). Os pontos de incidência I dos pontos R no espelho cilíndrico também devem ser calculados. Vamos descrever matematicamente este processo [1,4].



(a)



(b)

Figura 2: Anamorfose cilíndrica: (a) imagem reconstruída; (b) imagem deformada [7].

A Figura 3 ilustra o processo da reflexão em um espelho cilíndrico. Sem perda de

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0564

generalidade, definimos o plano objeto como sendo o plano xy e o sólido refletor como sendo o cilindro

$$\pi : x^2 + y^2 = r^2. \tag{1}$$

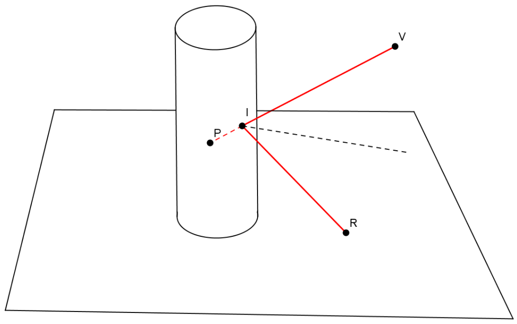


Figura 3: Representação da reflexão em um espelho cilíndrico [2].

Considerando $V = (v_x, v_y, v_z)$ o ponto do observador (externo ao cilindro e não pertencente ao plano objeto) e $P = (p_x, p_y, p_z)$ como um ponto da imagem reconstituída (interno ao cilindro), queremos determinar o ponto R, no plano objeto, cujo ponto P é a sua imagem no espelho.

A relação entre R e P é estabelecida por uma lei física (ótica): o raio de incidência que parte de R incide no espelho em I, sendo refletido e atingindo o observador em V. Porém, o observador vê o ponto como se este estivesse atrás do espelho, em P.

Para determinar as coordenadas de I, devemos definir a reta $\overleftrightarrow{VP}$, obtendo os dois pontos de $\overleftrightarrow{VP} \cap \pi$. O ponto entre V e P será o ponto I.

Sendo assim, a equação da reta $\overleftrightarrow{VP}$ é dada por:

$$\begin{aligned}
&\overleftrightarrow{VP} = P + t\,(V - P)\,,\ t \in \mathbb{R};\\
&\overleftrightarrow{VP} = (p_x, p_y, p_z) + t\,((v_x, v_y, v_z) - (p_x, p_y, p_z))\,;\\
&\overleftrightarrow{VP} = (p_x + t\,(v_x - p_x)\,, p_y + t\,(v_y - p_y)\,, p_z + t\,(v_z - p_z))\,.
\end{aligned} \tag{2}$$

Substituindo (2) na Equação (1), temos que:

$$\begin{aligned}
&r^2 = x^2 + y^2;\\
&r^2 = (p_x + t\,(v_x - p_x))^2 + (p_y + t\,(v_y - p_y))^2\,;\\
&r^2 = {p_x}^2 + 2tp_x\,(v_x - p_x) + t^2\,(v_x - p_x)^2 + {p_y}^2 + 2tp_y\,(v_y - p_y) + t^2\,(v_y - p_y)^2\,;
\end{aligned}$$

$$\left((v_x - p_x)^2 + (v_y - p_y)^2\right) t^2 + 2\,(p_x\,(v_x - p_x) + p_y\,(v_y - p_y))\,t + \left({p_x}^2 + {p_y}^2 - r^2\right) = 0. \tag{3}$$

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0564

A Equação (3) é quadrática em relação à t. Como P é um ponto interno, V é um ponto externo e a reta $\overleftrightarrow{VP}$ é secante ao cilindro, a Equação (3) tem duas raízes reais distintas, sendo uma delas para $0 < t < 1$ $\left(\text{uma vez que } \overleftrightarrow{VP} = (1-t)\,P + tV\right)$ e a outra para $t < 0$.

A raiz referente a I será positiva, ou seja,

$$t_i = \frac{-k_2 + \sqrt{{k_2}^2 - 4k_1k_3}}{2k_1}, \tag{4}$$

onde

$$\begin{aligned} k_1 &= (v_x - p_x)^2 + (v_y - p_y)^2\,, \\ k_2 &= 2\left(p_x\,(v_x - p_x) + p_y\,(v_y - p_y)\right), \\ k_3 &= {p_x}^2 + {p_y}^2 - r^2, \end{aligned}$$

são os coeficientes da Equação (3).

Dessa forma, o ponto de incidência I, denotado por $I = (i_x, i_y, i_z)$, é dado pela Equação (2) com $t = t_i$, ou seja,

$$I = \left(p_x + t_i\,(v_x - p_x)\,, p_y + t_i\,(v_y - p_y)\,, p_z + t_i\,(v_z - p_z)\right).$$

Para o caso do cilindro, podemos definir o vetor normal $\overrightarrow{n}$ com origem em $(0, 0, i_z)$ e extremidade em I como

$$\begin{aligned} \overrightarrow{n} &= (i_x - 0, i_y - 0, i_z - i_z)\,, \\ \overrightarrow{n} &= (i_x, i_y, 0)\,. \end{aligned}$$

A partir desses resultados, podemos esboçar o esquema da Figura 4(a), onde $\overrightarrow{v}$ é o vetor com origem em I e extremidade em V. Queremos definir o vetor $\overrightarrow{r}$, simétrico a $\overrightarrow{v}$ em relação à $\overrightarrow{n}$. Traçando a projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{v}$ em $\overrightarrow{n}$ $(Proj_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{v})$, obtemos o esquema da Figura 4(b), onde

$$\overrightarrow{r} \;=\; \overrightarrow{v} + 2\,\overrightarrow{a} \tag{5}$$

e

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v} + \overrightarrow{a} &= Proj_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{v}, \\ \overrightarrow{a} &= Proj_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}, \\ \overrightarrow{a} &= \frac{\overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{v}}{|n|^2}\overrightarrow{n} - \overrightarrow{v}. \end{aligned} \tag{6}$$

Substituindo (6) na Equação (5), obtemos para $\overrightarrow{r}$, denotado por $\overrightarrow{r} = (r_x, r_y, r_z)$,

$$\overrightarrow{r} \;=\; \frac{2\,\overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{n}|^2}\overrightarrow{n} - \overrightarrow{v}.$$

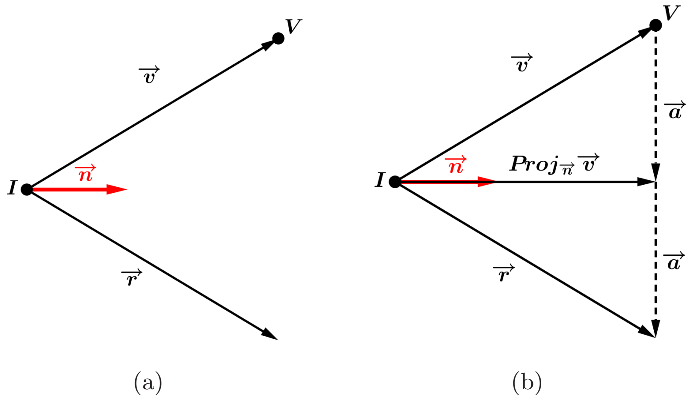


Figura 4: (a) Vetor normal $\overrightarrow{n}$; (b) projeção ortogonal de $\overrightarrow{v}$ sobre $\overrightarrow{n}$ [2].

Falta-nos ainda determinar as coordenadas do ponto R. A equação da reta $\overleftrightarrow{IR}$ é dada por

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{IR} &= I + t\overrightarrow{r},\ t \in \mathbb{R}, \\ \overleftrightarrow{IR} &= (i_x + tr_x, i_y + tr_y, i_z + tr_z)\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Sendo R o ponto de $\overleftrightarrow{IR}$ com $z = 0$, temos que

$$\begin{aligned} i_z + tr_z &= 0, \\ t &= -\frac{i_z}{r_z}. \end{aligned} \tag{8}$$

Substituindo (8) em (7), obtemos as coordenadas do ponto R, ou seja,

$$R = \left(i_x - \frac{i_z r_x}{r_z}, i_y - \frac{i_z r_y}{r_z}, 0 \right).$$

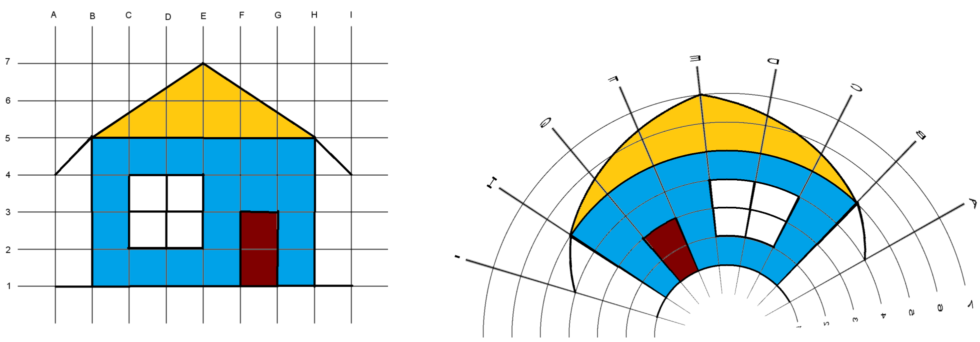
Dessa forma, podemos determinar todos os pontos da figura anamórfica no plano objeto.

3 Oficina no Ensino Fundamental

Iavorski, Professor no Colégio Estadual do Campo Professor Aloísio, Campo Largo, Paraná, planejou e aplicou uma oficina de anamorfose em uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental. A oficina foi desenvolvida durante cinco aulas regulares com o intuito de estabeler conceitos de geometria plana e espacial pertencentes ao "Conteúdo Estruturante Geometrias", segundo as Diretrizes Curriculares da Educação Básica (DCEs) do Estado do Paraná [6] para o sexto ano do Ensino Fundamental. As atividades também permitiram antecipar a discussão de plano cartesiano, plano polar e sistemas de coordenadas.

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0564

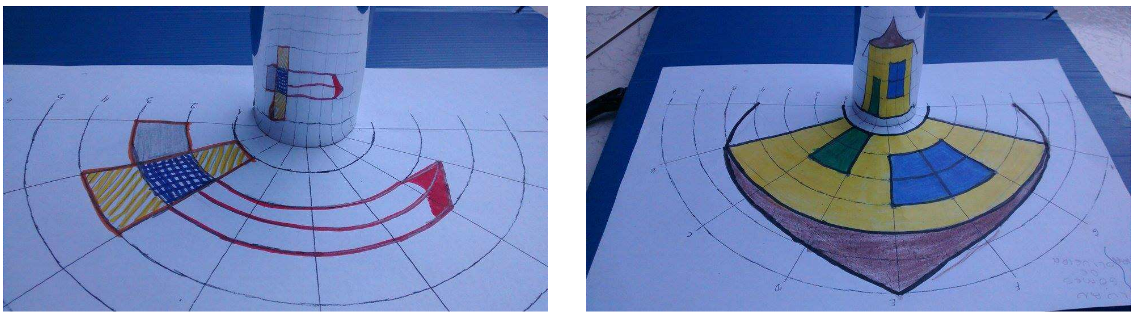
Inicialmente, Iavorski [2] apresentou algumas obras de István Orosz e exemplos de anamorfose cilíndrica. Os estudantes ficaram impressionados com a "mágica" e logo começaram a associar as regiões das figuras com a imagem visualizada no cilindro. Na sequência, construíram uma malha quadriculada e aplicaram os conceitos de sistema de coordenadas. Cada estudante construiu uma figura formada apenas por segmentos de reta com extremos na interseção de 7 linhas horizontais e 9 linhas verticais de uma malha quadriculada ortogonal, como ilustrado na Figura 5(a). Em seguida, refizeram seus desenhos em uma malha composta por 7 linhas dispostas como arcos de circunferência e 9 linhas radiais, estando essas linhas associadas às linhas da malha quadriculada ortogonal, como representado na Figura 5(b).



(a) (b)

Figura 5: (a) Malha quadriculada; (b) malha radial associada [2].

A última etapa consistiu na visualização da anamorfose cilíndrica. Como cilindros refletores, utilizaram as tradicionais canecas de alumínio do colégio, que possibilitaram resultados satisfatórios, como ilustra a Figura 6. Para obter imagens de melhor qualidade a um custo baixo, sugere-se revestir um cano de PVC com uma película protetora (insulfilm refletor).



(a) (b)

Figura 6: Anamorfose cilíndrica construída pelos alunos do 6º ano: (a) espada samurai; (b) casa [2].

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0564

Percebe-se facilmente que os segmentos horizontais e verticais da Figura 5(a) correspondem a arcos e segmentos de reta na Figura 5(b), tornando fácil a reprodução desses segmentos na malha polar. Contudo, o mesmo não ocorre para os segmentos inclinados. Os estudantes notaram este detalhe ao visualizarem a projeção de seus desenhos no cilindro. Na Figura 6 observa-se, por exemplo, que o telhado da casa não reproduz a figura original. Para sanar o problema, pode-se dividir os segmentos em outros menores e trabalhar com pontos intermediários.

4 Conclusões

A anamorfose é uma ferramenta atrativa que desperta a curiosidade dos estudantes e possibilita organizar e aplicar atividades interdisciplinares. Os trabalhos desenvolvidos na oficina no Ensino Fundamental permitiram uma abordagem lúdica de conceitos de geometria plana e espacial e sistemas de coordenadas e suas aplicações, com excelente participação dos estudantes. A anamorfose também pode ser empregada em oficinas/atividades no Ensino Médio. Iavorski [2] sugere a anamorfose de gráficos, a qual permite explorar o conceito de logaritmo e suas propriedades, e a anamorfose de mapas, com a qual se pode elaborar uma atividade interdisciplinar com Geografia.

Referências

[1] D. Halliday, R. Resnick, and J. Walker. *Fundamentos de Física: Ótica e Física Moderna*, v. 4, LTC, Rio de Janeiro, 2009.

[2] C. Iavorski, Anamorfose: uma arte no ensino de matemática e sua aplicação em atividades interdisciplinares, Dissertação de Mestrado, UTFPR, Curitiba, PR, 2014.

[3] C. Iavorski, and O. H. Saito. Ensinando conteúdos matemáticos usando anamorfose, *Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics*, v. 2, n. 1, 2014. DOI: 10.5540/03.2014.002.01.0131.

[4] E. L. Lima. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*, 2 ed., IMPA, Rio de Janeiro, 2011.

[5] L. T. Santos, *Anamorfose no ensino da matemática*. Disponível em http://dspace.bc.uepb.edu.br:8080/xmlui/bitstream/handle/123456789/486/PDF%20-%20Luciano%20Trajano%20dos%20Santos%201.pdf?sequence=1. Acesso em 12 de fevereiro de 2016.

[6] Secretaria de Estado da Educação do Paraná. *Diretrizes Curriculares da Educação Básica*. SEED, Paraná, 2008.

[7] D. Spickler, and J. Bergner, *Cylinder reflections: the mathematics behind the images.* Disponível em: http://facultyfp.salisbury.edu/despickler/personal/Resources/TechnologyWorkshops/ScienceNight2011/ScienceNightSU.pdf. Acesso em: 12 de fevereiro de 2016.

