Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Abordagem robusta de Bertsimas e Sim aplicada a problemas de programação linear sujeitos a incertezas

Vinicius Aparecido Salatta[1]
Acadêmico do curso de Matemática da UNESPAR, Campo Mourão, PR
Gislaine Aparecida Periçaro[2]
Colegiado de Matemática, UNESPAR, Campo Mourão, PR
Tatiane Cazarin da Silva[3]
Departamento de Matemática, UTFPR, Campo Mourão, PR

1 Introdução

Problemas reais que são modelados como problemas de otimização estão sempre sujeitos a incertezas nos dados, decorrentes de erros de medição ou previsão. Para lidar com tais problemas, devemos empregar abordagens que levem em consideração essas variações, pois, caso contrário, a solução encontrada pode não ter um significado prático. A Otimização Robusta é uma abordagem que se destaca nessa área por possuir a vantagem de não necessitar do conhecimento prévio de informações probabilísticas dos parâmetros de incerteza. Esta metodologia adota uma formulação min-max e considera como solução ótima robusta um ponto que permaneça viável para todas as possíveis realizações dos parâmetros de incerteza. A fim de apresentar tal formulação, considere o problema de programação linear

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{sujeito a} & Ax \leq b, \;\; l \leq x \leq u, \end{array} \tag{1}$$

em que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $c, l, u \in \mathbb{R}^n$. Vamos supor, sem perda de generalidade, que as incertezas dos dados estejam presentes apenas na matriz de coeficientes $A \in K$, sendo $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ o conjunto convexo onde residem as incertezas. Assim, um problema de programação linear sujeito a incertezas consiste de uma família de problemas do tipo (1) com os dados variando no conjunto de incertezas K e sua contraparte robusta é formulada como

$$\begin{array}{ll} \min & \left\{ \max \;\; c^T x \right\} \\ \text{sujeito a} & Ax \leq b \;\; \forall \;\; A \in K, \;\; l \leq x \leq u. \end{array} \tag{2}$$

Entre as abordagens clássicas de Otimização Robusta linear que visam obter formulações robustas que sejam computacionalmente tratáveis, podemos citar aquelas propostas por Ben-Tal e Nemirovski [1], Bertsimas e Sim [2] e Soyster [3]. Nesse sentido, o

[1] vi.salatta@hotmail.com
[2] gislaine.pericaro@unespar.edu.br
[3] tatianecazarin@gmail.com

objetivo deste trabalho é apresentar a forma com que problemas de otimização sujeitos a incertezas podem ser tratados de acordo com a abordagem robusta de Bertsimas e Sim, a qual descrevemos brevemente a seguir.

2 Abordagem de Bertsimas e Sim

A primeira abordagem robusta para tratar problemas de otimização sujeitos a incertezas que envolvem apenas funções lineares foi proposta por Soyster [3]. Tal abordagem tem como principais características a formulação de uma contraparte robusta que também é um problema linear e o excesso de conservadorismo, uma vez que considera a "pior" realização possível para todos os parâmetros incertos simultaneamente. Alguns anos mais tarde, Ben-Tal e Nemirovski [1] propuseram uma nova abordagem para problemas de programação linear sujeito a incertezas em que há um controle maior do conservadorismo, mas, por outro lado, a contraparte robusta recai em um problema quadrático cônico, o que exige um alto esforço computacional para ser solucionado.

A fim de contornar o conservadorismo e a complexidade computacional das abordagens de Soyster [3] e Ben-Tal e Nemirovski [1], respectivamente, Bertsimas e Sim [2] propuseram uma nova formulação da contraparte robusta de um problema de programação linear sujeito a incertezas, que mantém a linearidade do problema e controla o conservadorismo por meio da inclusão de um parâmetro Γ, definido pelos autores como o "preço da robustez".

A formulação robusta de Bertsimas e Sim [2] assume que as incertezas residem em conjuntos intervalares. Considere a i-ésima restrição do problema (1) e sejam J_i o conjunto dos índices dos coeficientes $a_{ij}, \quad j \in J_i$, sujeitos a incertezas e $\tilde{a}_{ij}$ a possível realização definida em $[a_{ij} - \hat{a}_{ij}, a_{ij} + \hat{a}_{ij}]$. Os autores introduziram, para cada linha i da matriz A, um parâmetro Γ_i, não necessariamente inteiro, tal que $\Gamma_i \in [0, |J_i|]$. A função do parâmetro Γ é ajustar a robustez do método proposto contra o nível de conservadorismo da solução. Assumindo que somente um subconjunto dos coeficientes irá variar de modo a afetar negativamente a solução, esta abordagem garante que a solução permanece viável se no máximo $\lfloor \Gamma_i \rfloor$ coeficientes variarem. Além disso, fornece garantias probabilísticas de que mesmo que mais de $\lfloor \Gamma_i \rfloor$ coeficientes variem, a solução robusta ainda terá alta probabilidade de ser viável. A princípio a abordagem de Bertsimas e Sim [2] obtém uma contraparte robusta não linear, porém esta pode ser reformulada fornecendo um problema equivalente, o qual possui a importante característica de ser linear.

Referências

[1] A. Ben-Tal e A. Nemirovski. Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data, *Mathematical Programming*, 88:411–424, 2000.

[2] D. Bertsimas e M. Sim. The price of robustness, *Operations Research*, 52:35–53, 2004.

[3] A. L. Soyster, A. L. Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming, *Operations Research*, 14:1154-1151, 1973.

