Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Abordagem robusta de Soyster aplicada a problemas de programação linear sujeitos a incertezas

Geovana Aparecida França dos Santos[1]
Acadêmica do curso de Matemática da UNESPAR, Campo Mourão, PR
Gislaine Aparecida Periçaro[2]
Colegiado de Matemática, UNESPAR, Campo Mourão, PR
Tatiane Cazarin da Silva[3]
Departamento de Matemática, UTFPR, Campo Mourão, PR

1 Introdução

Problemas de otimização são frequentemente tratados de forma determinística, assumindo que os parâmetros envolvidos na modelagem da função objetivo e das restrições são conhecidos com exatidão. No entanto, em situações práticas, que dão origem a esses problemas, tais parâmetros estão sujeitos a incertezas devido a erros de modelagem ou previsão. Nos últimos anos vários pesquisadores têm se dedicado ao desenvolvimento de abordagens destinadas ao tratamento de problemas de otimização sob incerteza. Entre tais abordagens destacam-se duas metodologias principais: a Otimização Estocástica e a Otimização Robusta. A primeira delas assume que a distribuição de probabilidade das incertezas é conhecida. Já para a segunda, informações probabilísticas não são necessárias e assume-se que as incertezas são descritas por meio de conjuntos limitados, geralmente convexos.

De acordo com [2], a Otimização Robusta adota a abordagem min-max e considera como solução ótima robusta um ponto que permaneça viável para todas as possíveis realizações dos parâmetros incertos. Esta abordagem dá origem a subproblemas, denominados contraparte robusta, os quais substituem a formulação determinística do problema, levando em consideração as incertezas. Neste trabalho estamos particularmente interessados em estudar a formulação de Soyster [3], que foi a primeira abordagem robusta destinada ao tratamento de problemas de otimização sujeitos a incertezas que envolvem apenas funções lineares.

[1]geovanaafs@gmail.com
[2]gislaine.pericaro@unespar.edu.br
[3]tatianecazarin@gmail.com

2 Abordagem de Soyster

Conforme discutido em [1], considere o problema de programação linear

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{sujeito a} & Ax \leq b, \;\; l \leq x \leq u, \end{array} \tag{1}$$

em que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $c, l, u \in \mathbb{R}^n$. Vamos supor, sem perda de generalidade, que as incertezas dos dados estejam presentes apenas na matriz de coeficientes $A \in K$, sendo $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ o conjunto convexo onde residem as incertezas. Assim, um problema de programação linear sujeito a incertezas consiste de uma família de problemas do tipo (1) com os dados variando no conjunto de incertezas K e sua contraparte robusta é formulada como

$$\begin{array}{ll} \min & \left\{\max \;\; c^T x\right\} \\ \text{sujeito a} & Ax \leq b \;\; \forall \;\; A \in K, \;\; l \leq x \leq u. \end{array} \tag{2}$$

Uma solução para o problema (2) é denominada solução ótima robusta para o problema de otimização linear sujeito a incertezas (1), sendo aquela que fornece o melhor valor para a função objetivo considerando todas as possíveis realizações para os parâmetros incertos. Podemos observar na formulação (2) que quando o conjunto K é infinito, a contraparte robusta apresenta infinitas restrições, o que pode comprometer a tratabilidade deste. Dessa forma, as diferentes abordagens de otimização robusta linear visam obter formulações robustas que sejam computacionalmente tratáveis, levando em consideração a natureza do conjunto K. A formulação de Soyster [3] estabelece que as incertezas estão presentes nas colunas da matriz de coeficientes A considerando, portanto, o seguinte problema

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{sujeito a} & x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n \leq b, \;\; \forall a_j \in K_j, \;\; x \geq 0, \end{array} \tag{3}$$

em que $K_j \in \mathbb{R}^n$, para todo $j = 1, \cdots, n$, são conjuntos de incertezas convexos. Em [3] é mostrado que mesmo que algum K_j seja infinito, o problema pode ser resolvido por um problema equivalente, que possui um número finito de restrições, dadas por

$$x_1 \bar{a}_1 + x_2 \bar{a}_2 + \cdots + x_n \bar{a}_n \leq b, \;\; x \geq 0, \tag{4}$$

em que $\bar{a}_j = \sup_{a_j \in K_j} a_{ij}$. Esta abordagem tem a vantagem de fornecer uma contraparte robusta que também é um problema linear, mas pode ser extremamente conservadora, uma vez que considera a "pior" realização possível para todos os parâmetros de incerteza simultaneamente.

Referências

[1] A. Ben-Tal, L. El Ghaoui e A. Nemirovski. *Robust Optimization*. Princeton University Press, New Jersey, 2009.

[2] D. Bertsimas e M. Sim. The price of robustness, *Operations Research*, 52:35–53, 2004.

[3] A. L. Soyster, A. L. Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming, *Operations Research*, 14:1154-1151, 1973.

