Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Condições de Otimalidade para Problemas de Controle Ótimo com Restrições Mistas

Jamielli Tomaz Pereira[1]
IMECC, UNICAMP, Campinas, SP
Roberto Andreani[2]
IMECC, UNICAMP, Campinas, SP
Valeriano Antunes de Oliveira[3]
IBILCE, UNESP, São José do Rio Preto, SP

1 Introdução

Neste trabalho apresentamos as condições necessárias de otimalidade para um problema de controle ótimo com restrições mistas de igualdadade e desigualdade assumindo uma hipótese de regularidade do tipo Mangasarian-Fromovitz e considerando a possibilidade dos dados serem não suaves. Este resultado foi mostrado pelos autores de Pinho e Rosenblueth em [1].

2 Problema e Resultado

Considere o seguinte problema de controle ótimo:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & l(x(0), x(1)) \\ \text{sujeito a} & \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), v(t)) \ q.t. \ t \in T, \\ & g(t, x(t), u(t), v(t)) \leq 0, b(t, x(t), u(t), v(t)) = 0 \ q.t. \ t \in T, \\ & v(t) \in V(t) \ q.t. \ t \in T, (x(0), x(1)) \in C, \end{array} \qquad (P)$$

onde $T = [0, 1]$, $l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(f, g, b) : T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k_u} \times \mathbb{R}^{k_v} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_g} \times \mathbb{R}^{m_b}$ e $C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Na presença de restrições mistas, a fim de se obter condições necessárias de otimalidade, faz-se é necessário impor algumas condições de regularidade nos dados do problema, as mais conhecidas envolvem uma condição de posto completo. Em de Pinho e Rosenblueth [1] os autores trabalharam com uma hipótese mais fraca, do tipo Mangasarian-Fromovitz: (H*) Existem constantes $K_1, K_2 > 0$ e funções $a \in L^\infty(T; \mathbb{R}^{m_g})$ e $h \in L^\infty(T; \mathbb{R}^{k_u})$ com $|h(t)| = 1$ $q.t.$ $t \in T$ tais que, para quase todo $t \in T$,

[1] jamiellipereira@yahoo.com.br
[2] andreani@ime.unicamp.br
[3] antunes@ibilce.unesp.br

(i) $a_i(t) > K_2$ para $i \in \mathcal{I}_a(t) = \{i \in \{1, \ldots, m_g\} \mid g_i(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t)) = 0\}$;

(ii) $\nabla_u g^{\mathcal{I}_a(t)}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t)) \cdot h(t) = a^{\mathcal{I}_a(t)}(t)$; $\nabla_u b(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t)) \cdot h(t) = 0$;

(iii) $\det \nabla_u b(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t)) \nabla_u b(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t))^\top \geq K_1$.

Teorema 2.1. *Seja $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ um minimizador fraco para (P). Defina $H(t, x, p, q, r, u, v) := p \cdot f(t, x, u, v) + q \cdot b(t, x, u, v) + r \cdot g(t, x, u, v)$. Suponha válida (H*) e outras hipóteses (ver [1]), então existem $p \in W^{1,1}(T; \mathbb{R}^n), (q, r, \zeta) \in L^1(T; \mathbb{R}^{m_b} \times \mathbb{R}^{m_g} \times \mathbb{R}^{k_v})$ e $\lambda \geq 0$ t. q.*

(i) $\|p\|_\infty + \lambda \neq 0$,

(ii) $(-\dot{p}(t), 0, \zeta(t)) \in co\partial_{x,u,v} H(t, \bar{x}(t), p(t), q(t), r(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t))$ *q.t.* $t \in T$,

(iii) $\zeta(t) \in coN_{V(t)}(\bar{v}(t))$ *q.t.* $t \in T$,

(iv) $r(t) \cdot g(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t)) = 0$ *e* $r(t) \leq 0$ *q.t.* $t \in T$,

(v) $(p(0), -p(1)) \in N_C(\bar{x}(0), \bar{x}(1)) + \lambda \partial l(\bar{x}(0), \bar{x}(1))$.

Além disso, para alguma função integrável K_m, $|(q(t), r(t))| \leq K_m(t)|p(t)|$ q.t. $t \in T$.

3 Conclusões

O próximo passo deste trabalho é generalizar para o contexto de controle ótimo a condição de qualificação de posto constante (CRCQ), ver Janin [2], que é uma hipótese alternativa à condição de qualificação de Mangasarian-Fromovitz (MFCQ). Conjecturamos a validade do Teorema 2.1 para problemas de controle ótimo com restrições mistas de igualdade assumindo no lugar de (H*) uma generalização de CRCQ. Seguindo a mesma lógica da teoria de otimização no contexto de dimensão finita, onde a Condição de Karush-Kunh-Tucker é válida assumindo CRCQ, acreditamos que no contexto de dimensão infinita o mesmo deve acontecer. As condições de posto constante, assim como a de Mangasarian-Fromovitz, são muito importantes porque aparecem em muitos problemas de controle. Por isso, mostrar que o princípio do máximo também é válido para problemas que satisfazem CRCQ é de grande interesse, pois uma quantidade maior de problemas poderiam ser resolvidos através desta ferramenta importantíssima da teoria de otimização.

Agradecimentos

À FAPESP pela bolsa de mestrado, processo nº 2014/02028-2.

Referências

[1] M. R. de Pinho and J. F. Rosenblueth. Necessary conditions for constrained problems under mangasarian-fromowitz conditions. *SIAM J. Control Optim.*, 47:535–552, 2008.

[2] R. Janin. Directional derivative of the marginal function in nonlinear programming. *Math. Program. Stud.*, 21:110–126, 1984.