Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Programação Quadrática Sequencial para Problemas de Otimização Não-Linear com Restrições

Antônio César Miálich Júnior[1]
Valeriano Antunes de Oliveira[2]
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, UNESP - Univ Estadual Paulista,
Campus São José do Rio Preto, Departamento de Matemática Aplicada.

1 Introdução

Considere o seguinte problema: encontrar um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ para minimizar uma função de custo $f(x)$ sujeito às restrições de igualdade $h_j(x) = 0$, $j = 1,..,p$, e restrições de desigualdade $g_i(x) \leq 0$, $i = 1, ..., m$, onde $f, h_j, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 1,..,p$, $i = 1, ..., m$.

Um dos métodos mais eficazes para a otimização não-linear com restrições gera passos em que subproblemas quadráticos são resolvidos. Esta abordagem, conhecida como programação quadrática sequencial (SQP, na sigla em inglês) pode ser usada tanto com busca linear ou com métodos de região de confiança.

Os métodos SQP empregam o método de Newton (ou Quasi-Newton) para resolver as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) do problema original. Como resultado, ao invés de se resolver o problema original, resolve-se, em cada iteração, um subproblema de minimização quadrática (PQ) que consiste em uma aproximação quadrática da função Lagrangiana otimizada sobre uma aproximação linear das restrições. As condições de otimalidade deste subproblema são idênticas às condições do problema original.

Métodos SQP são bastante usados para aplicações de engenharia, veja, por exemplo, Thanedar [3]. Teoremas que garantem a convergência e o cálculo da taxa de convergência dos métodos SQP podem ser encontrados em Nocedal [2].

2 O Algoritmo SQP

1. Defina uma estimativa inicial $x^{(0)}$ e a matriz Hessiana aproximada como a matriz identidade, isto é, $H^{(0)} = I$. Seja $k = 0$ o contador de iterações. Selecione um valor inicial apropriado para o parâmetro de penalidade R_0 ($R_0 = 1$ é uma seleção razoável), utilizado na função de descida, e dois números pequenos ε_1 e ε_2, que definem a violação de restrição e o parâmetro de convergência, respectivamente.

[1]mialichjr@gmail.com
[2]antunes@ibilce.unesp.br

2. Calcule as funções de custo e de restrição e os gradientes das funções de custo e de restrição em $x^{(k)}$. Calcule a violação máxima de restrição V_k, que é definida como $V_k = \max\{0;\ |h_1|, |h_2|, ..., |h_p|;\ g_1, g_2, ..., g_m\}$. Se $k = 0$, vá para o Passo 3. Se $k > 0$, atualizar a Hessiana da função de Lagrange (trata-se de uma fórmula BFGS) $L(x, u, v) = f(x) + v \cdot h(x) + u \cdot g(x)$ calculando: $s^{(k)} = \alpha_k d^{(k)}$, α_k é o tamanho do passo e $d^{(k)}$ é a direção de descida, $z^{(k)} = H^{(k)} s^{(k)}$, $y^{(k)} = \nabla L(x^{(k+1)}, u^{(k)}, v^{(k)}) - \nabla L(x^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)})$, $\xi_1 = s^{(k)} \cdot y^{(k)}$, $\xi_2 = s^{(k)} \cdot z^{(k)}$, $\theta = 1$, se $\xi_1 \geq 0.2\xi_2$, caso contrário $\theta = 0.8\xi_2/(\xi_2 - \xi_1)$, $w^{(k)} = \theta y^{(k)} + (1 - \theta) z^{(k)}$, $\xi_3 = s^{(k)} \cdot w^{(k)}$, $D^{(k)} = (1/\xi_3) w^{(k)} w^{(k)T}$, $E^{(k)} = (1/\xi_2) z^{(k)} z^{(k)T}$. Assim, a matriz Hessiana é atualizada como $H^{(k+1)} = H^{(k)} + D^{(k)} - E^{(k)}$.

3. Defina o subproblema PQ da seguinte forma: min $\bar{f} = \nabla f(x^{(k)})^T d^{(k)} + 0.5 d^{(k)T} H^{(k)} d^{(k)}$, sujeito a $[\nabla h_i(x^{(k)})]^T d^{(k)} = [-h_i(x^{(k)})]$, $i = 1, 2, ..., p$, $[\nabla g_i(x^{(k)})]^T d^{(k)} \leq [-g_i(x^{(k)})]$, $i = 1, 2, ..., m$. Resolva o subproblema utilizando as condições de KKT para obter a direção de busca $d^{(k)}$ e os multiplicadores de Lagrange $v^{(k)}$ e $u^{(k)}$.

4. Verifique o critério de parada, $||d^{(k)}|| \leq \varepsilon_2$ e $V_k \leq \varepsilon_1$. Se o critério for satisfeito, pare. Caso contrário, continue.

5. Calcule r_k definido como $r_k = \sum_{i=1}^{p} |v_i^{(k)}| + \sum_{i=1}^{m} u_i^{(k)}$. Defina $R = \max\{R_k, r_k\}$.

6. Seja $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}$, onde $\alpha = \alpha_k$ é um tamanho de passo adequado. O tamanho do passo pode ser obtido por minimização da função de descida $\Phi_k = f_k + RV_k$, ao longo da direção de busca $d^{(k)}$, usando os métodos de busca inexata.

7. Salve o parâmetro de penalidade atual como $R_{k+1} = R$. Atualize o contador de iteração como $k = k + 1$, e vá para o Passo 2.

3 Conclusão

O método foi aplicado em um exemplo de otimização não-linear e também em uma aplicação do livro do Arora [1]. A aplicação referida é o *design* de uma viga retangular de área mínima. Na aplicação do método utilizamos $x^{(0)} = (50, 200)$ mm como estimativa inicial, $R_0 = 1$ como indicado no algoritmo, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.001$, para resolver os subproblemas PQ utilizamos uma extensão do método Simplex e o método de busca inexata utilizado foi o método de Armijo. Utilizamos o MATLAB na implementação do método. Observamos que a ideia do método SQP é bastante simples, mas eficaz em seu desempenho numérico.

Referências

[1] J. S. Arora. *Introduction to Optimum Design*. Elsevier Academic Press, 3rd ed, 2012.

[2] J. Nocedal and S. Wright. *Numerical Optimization*. Springer, 2nd ed, 2006.

[3] P. B. Thanedar, J. S. Arora, C. H. Tseng, O. K. Lim and G. J. Park. Performance of some SQP algorithms on structural design problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23:2187–2203, 1987.