Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Controle ótimo do fluxo de água em uma fôrma de gelo

Xie Jiayu[1]
Departamento Acadêmico de Eletrônica, UTFPR, Curitiba, PR
João Luis Gonçalves[2]
Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, Curitiba, PR

1 Introdução

Este trabalho trata da modelagem do preenchimento de uma fôrma de gelo com água. Desejamos que esse preenchimento seja eficiente. A eficiência pode significar minimizar o desperdício de água ou minimizar o tempo necessário para encher a fôrma, entre outras possibilidades.

2 Modelo

O modelo proposto considera funções de estado e de controle. As funções de estado representam o volume de água em cada compartimento da fôrma em cada instante de tempo. As funções de controle estão associadas a variação de posição da forma ao longo do tempo.

Para modelar o fenômeno, faremos algumas suposições simplificadoras. Considerando a fôrma com os compartimentos enumerados como na Figura 1, supomos que a água será adicionada apenas pelo compartimento 1, entrando a uma taxa constante igual a 1 e que a diagonal d da fôrma seja inclinada α graus em relação ao plano horizontal, sendo o compartimento 1 o mais alto.

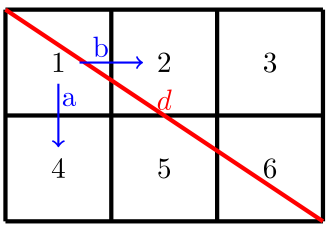

Figura 1: Esboço da fôrma de gelo com seus respectivos cubos enumerados e a diagonal d.

[1]xie.2014@alunos.utfpr.edu.br
[2]jlgoncalves@utfpr.edu.br

Supomos ainda que a água não muda de compartimento através da direção diagonal do compartimento, por exemplo, na Figura 1, a água que sai de 1 vai para 2 e 4, conforme setas em azul, mas não para 5. Essa suposição não é realística, mas simplifica a dinâmica do modelo e poderá ser modificada/aprimorada posteriormente usando princípios físicos.

Como único controle sobre o fenômeno permitiremos que a fôrma seja rotacionada $\theta(t)$ graus em torno de d, com $0 \leq \theta(t) \leq \theta_0$. Vale salientar que o volume de água que cada compartimento suporta depende de $\theta(t)$ e de α, esse volume é chamado de volume de suporte, $V_S(\theta)$, e é igual para todos os compartimentos. O volume de água no compartimento i no instante de tempo t é dado pela função $V_i(t)$.

Considerando que a água sai do compartimento i, no instante t, se $V_i(t) > V_S(\theta(t))$ e a quantidade de água que sai, $V_i(t) - V_S(\theta(t))$. Essa quantidade de água é distribuída em duas direções, as direções indicadas pelas setas a e b na Figura 1. Assumindo que a distribuição depende do ângulo $\theta(t)$, então as direções a e b recebem, respectivamente,

$$a(\theta(t))\big[V_i(t) - V_S(\theta(t))\big] \quad \text{e} \quad b(\theta(t))\big[V_i(t) - V_S(\theta(t))\big].$$

Assim, o seguinte conjunto de equações descreve a dinâmica do fluxo de água entre os compartimentos:

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = (E_i(t) - S_i(t)), \quad \text{para} \quad i = 1, ..., 6. \tag{1}$$

onde $E_i(t)$ é a quantidade de água que entra no i-ésimo cubo e $S_i(t)$ é a quantidade que sai dele. A quantidade de água que é jogada fora da fôrma entre os tempos t_0 e t_f é

$$J(t) = \int_{t_0}^{t_f} (V_{3F}(t) + V_{4F}(t) + V_{5F}(t) + V_{6F}(t))dt. \tag{2}$$

onde $V_{iF}(t)$ é a água derramada fora do i-ésimo compartimento no instante de tempo t.

Portanto, o problema de controle ótimo é $\min\limits_{\theta(t), V_i(t)} J(t)$ sujeito às equações de dinâmica definidas em (1) e $0 \leq \theta(t) \leq \theta_0$.

3 Conclusões

Usando o método pseudo-espectral, discretizamos esse problema de controle ótimo e, com o *Mathematica* implementamos o modelo computacionalmente. O trabalho ainda não está finalizado e as próximas etapas consistem em achar a solução ótima para esse modelo para posteriormente substituir as hipóteses simplificadoras por hipóteses realistas.

Referências

[1] V. M. Becerra and R. K. H. Lopes, Um tutorial sobre métodos pseudo-espectrais para controle ótimo computacional, *Revista Controle e Automação*, 21:224–244, 2010.

[2] M. A. G. Ruggiero and V. L. R. Lopes. *Cálculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais*. Pearson Makron Books, São Paulo, 1996.