Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

O problema da decomposição de matrizes em componentes esparsa e de posto pequeno

Ivan X. M. do Nascimento[1]
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC), Unicamp, Campinas, SP
Sandra A. Santos[2]
Departamento de Matemática Aplicada (DMA - IMECC), Unicamp, Campinas, SP

1 Introdução

Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ que possa ser escrita como a soma de uma componente $A_{\text{sp}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ esparsa com uma componente $A_{\text{lr}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de posto pequeno, queremos encontrar matrizes X_{sp} e X_{lr}, também em $\mathbb{R}^{m\times n}$, tais que X_{sp} seja esparsa e X_{lr} seja matriz de posto pequeno e, ainda, que a soma de ambas recupere A. Isto é, estamos interessados na resolução do seguinte problema de otimização:

$$\min_{X_{\text{sp}}, X_{\text{lr}}} \left\{\gamma \, \text{card}(X_{\text{sp}}) + \text{rank}(X_{\text{lr}}) \, : \, X_{\text{sp}} + X_{\text{lr}} = A, \; X_{\text{sp}} \in \mathcal{A}_1, \; X_{\text{lr}} \in \mathcal{A}_2\right\}, \tag{1}$$

onde $\text{card}(X_{\text{sp}})$ é o número de elementos não nulos de X_{sp} e $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são subconjuntos convexos quaisquer de $\mathbb{R}^{m\times n}$. Aqui, $\gamma \in (0, \infty)$ é um parâmetro que pode ser variado e estabelece um compromisso entre a cardinalidade e o posto. Por simplicidade de notação e raciocínio, adotaremos $m = n$ e $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathbb{R}^{n\times n}$.

Apesar de seu aparecimento em diversas aplicações práticas (ver [1]), o chamado Problema SLRMD (do inglês *Sparse and Low-rank Matrix Decomposition*) se apresenta como um problema de otimização não linear discreta bastante desafiador por pertencer à classe NP-difícil. Consequentemente, se fazem necessárias técnicas que viabilizem o tratamento do problema com os métodos de otimização existentes.

O objetivo deste trabalho é apresentar algumas formulações o Problema (1) que possam ser eficientemente resolvidas com métodos tradicionais de otimização.

2 Relaxação convexa para o problema SLRMD

Devido à impossibilidade de otimizar diretamente a cardinalidade e o posto das matrizes do Problema (1), consideramos o uso de uma relaxação convexa para o problema,

[1]ivan@ime.unicamp.br
[2]sandra@ime.unicamp.br

 © 2017 SBMAC

envolvendo uma combinação entre a norma ℓ_1 e a norma nuclear de matrizes[3].

O uso da norma ℓ_1 como simulador da cardinalidade de vetores se encontra consolidado na literatura e há diversos trabalhos que estabelecem condições de recuperação de soluções esparsas para problemas de otimização. Nos últimos anos, o uso da norma nuclear como aproximação para o posto de matrizes também tem se mostrado consideravelmente efetivo sob determinadas condições. É possível mostrar que tais normas conduzem à *melhor subaproximação convexa para o problema original*:

$$\min_{X_{\mathrm{sp}},\, X_{\mathrm{lr}}} \left\{\gamma\|X_{\mathrm{sp}}\|_1 + \|X_{\mathrm{lr}}\|_* \,:\, X_{\mathrm{sp}} + X_{\mathrm{lr}} = A,\ X_{\mathrm{sp}} \in \mathcal{A}_1,\ X_{\mathrm{lr}} \in \mathcal{A}_2\right\}. \tag{2}$$

2.1 Otimização da norma ℓ_1 e da norma nuclear

A maneira clássica de tratar a soma de valores absolutos presente na função objetivo é através da inserção de variáveis que originalmente não pertenciam ao problema. Com isto, se faz necessário incluir restrições lineares de desigualdade. Uma alternativa para evitar esse aumento de dimensão e do número de restrições pode ser a suavização da norma ℓ_1.

Por sua vez, a norma nuclear pode ser caracterizada através da reformulação do problema usando técnicas de programação semidefinida (SDP). Isto implica não só no aumento do número de variáveis mas também no aparecimento de desigualdades generalizadas nas restrições do problema, com uma formulação alternativa para o Problema (2) baseada em programação semidefinida (ver, p. ex. [2]).

Podemos também considerar as definições alternativas para a norma nuclear e, dessa forma, ampliar o horizonte de algoritmos aplicáveis ao problema. Por exemplo, se adotarmos a definição em termos da função traço e ainda eliminarmos as restrições de igualdade através de substituição na função objetivo, obtemos uma reformulação irrestrita para (2).

3 Conclusões

Neste breve resumo apresentamos a relaxação convexa mais adequada à resolução do problema da decomposição de matrizes em componentes esparsa e de posto pequeno. Além disso, descrevemos duas das várias formas de abordar o problema relaxado que podem ser numericamente resolvidas com métodos clássicos de otimização.

Referências

[1] V. Chandrasekaran, S. Sanghavi, P. A. Parrilo and A. S. Willsky. Rank-sparsity incoherence for matrix decomposition, *SIAM J. Optimiz.*, 21(2):572–596, 2011.

[2] J. Lee and B. Zou. Optimal rank-sparsity decomposition, *J. Global Optim.*, 60(2):307–315, 2013.

[3] Neste trabalho, chamamos de norma ℓ_1 de uma matriz X à soma dos valores absolutos de suas entradas, isto é, $\|X\|_1 = \sum_{i,j} |X_{i,j}|$. Por sua vez, a norma nuclear de X, representada por $\|X\|_*$, corresponderá à soma de seus valores singulares, ou seja, $\|X\|_* = \sum_i \sigma_i(X) = \sum \lambda_i(X^\top X) = \mathrm{tr}\sqrt{X^\top X}$. Esta norma também aparece na literatura como norma-1 de Schatten e norma da classe do traço.

© 2017 SBMAC