Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Existência e Regularidade de Soluções em Problemas Variacionais

Caroline de Arruda Signorini[1]
Valeriano Antunes de Oliveira[2]
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, UNESP - Univ. Estatual Paulista, Câmpus de São José do Rio Preto, Departamento de Matemática Aplicada.

1 Introdução

Desde seu início até a virada do século XX, a teoria de Cálculo das Variações carecia de um componente decisivo: não havia teoremas de existência. Estes constituem um ingrediente essencial do método dedutivo para resolver problemas de otimização, abordagem a qual combina existência, condições necessárias rigorosas e exame de candidatos para chegar a uma solução. Vamos apresentar resultados da teoria de existência em Cálculo das Variações que estendem o contexto do problema básico para funções absolutamente contínuas definidas num intervalo $[a, b]$, as quais constituem o espaço $AC[a, b]$, em vez de estudar os espaços clássicos $C^2[a, b]$ ou $\mathrm{Lip}\,[a, b]$. Aos elementos de $AC[a, b]$ denominaremos *arcos*.

2 Resultados

Neste trabalho, trataremos o seguinte problema

$$\min\ J(x) = \int_a^b \Lambda\big(t, x(t), x'(t)\big)\, dt \quad : \quad x \in AC[a, b],\ x(a) = A,\ x(b) = B, \tag{1}$$

onde $\Lambda : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é a Lagrangiana e $A, B \in \mathbb{R}^n$ são dados.

Definição 2.1. *Um arco x é* admissível *para o Problema (1) se satisfaz as condições de contorno e se $J(x)$ é bem definido e finito. Um arco admissível x_* é dito ser uma* solução *ou um* minimizador *se $J(x_*) \leqslant J(x)$ para quaisquer outros arcos admissíveis x.*

Definição 2.2. *Um arco admissível x_* é um* minimizador local fraco *se, para algum $\varepsilon > 0$, tem-se $J(x_*) \leqslant J(x)$ para todos arcos admissíveis x satisfazendo $\|x - x_*\|_{AC} \leqslant \varepsilon$ e $\|x' - x_*'\|_{L^\infty} \leqslant \varepsilon$. E um arco admissível x_* é um* mínimo local forte *se existe $\varepsilon > 0$ tal que $J(x_*) \leqslant J(x)$ para todo arco admissível x que satisfaz $\|x - x_*\| \leqslant \varepsilon$.*

[1]carolineasignorini@gmail.com
[2]antunes@ibilce.unesp.br

Teorema 2.1. ***(Tonelli, 1915)*** *Se a Lagrangiana $\Lambda(t,x,v)$ é contínua, convexa em v e coerciva de grau $r>1$, isto é, para certas constantes $\alpha>0$ e β, tem-se $\Lambda(t,x,v)\geqslant\alpha|v|^r+\beta$ para todo $(t,x,v)\in[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, então o Problema (1) admite uma solução em $AC[a,b]$.*

(Ver [1], Teorema 16.2, p. 321.)

Teorema 2.2. ***(Tonelli-Morrey)*** *Suponha que Λ admita gradientes Λ_x e Λ_v, os quais são contínuos em (t,x,v), assim como o é Λ. Se, para todo conjunto limitado $S\subset\mathbb{R}^n$, existem uma constante c e uma função integrável $d:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ tais que, para todo $(t,x,v)\in[a,b]\times S\times\mathbb{R}^n$, tem-se $|\Lambda_x(t,x,v)|+|\Lambda_v(t,x,v)|\leqslant c\left(|v|+|\Lambda(t,x,v)|\right)+d(t)$, então qualquer mínimo local fraco x_* satisfaz a equação de Euler na forma integral:*

$$\Lambda_v\left(t,x_*(t),x_*'(t)\right)=c+\int_a^t\Lambda_x\left(s,x_*(s),x_*'(s)\right)ds \;\; q.t.p. \;\; em \;\; [a,b].$$

(Ver [1], Teorema 16.13, p. 327 e Teorema 15.2, p. 308.)

Definição 2.3. *Dizemos que Λ tem* crescimento de Nagumo *ao longo de x_* se existe uma função $\theta:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}$ satisfazendo $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\frac{\theta(\alpha)}{\alpha}=+\infty$ e tal que, para $t\in[a,b]$ e $v\in\mathbb{R}^n$, tem-se $\Lambda\left(t,x_*(t),v\right)\geqslant\theta\left(|v|\right)$.*

Corolário 2.1. *Sob as hipóteses do Teorema 2.2, se $\Lambda(t,x,v)$ é convexa em v e tem crescimento de Nagumo ao longo de x_*, então x_* é Lipschitz.*

Teorema 2.3. ***(Clarke-Vinter)*** *Seja $x_*\in AC[a,b]$ um mínimo local forte para o Problema (1), onde a Lagrangiana é contínua, autônoma, convexa em v e possui crescimento de Nagumo ao longo de x_*. Então x_* é Lipschitz.*

(Ver [1], Teorema 16.18, p. 330.)

As demonstrações dos resultados acima podem ser encontradas em [1].

3 Conclusões

Este trabalho nos mostra que estender a classe de funções candidatas à solução do problema básico para o conjunto das funções absolutamente contínuas foi um grande passo para que se pudesse desenvolver a teoria de existência em Cálculo das Variações. Com este estudo, vimos também que exigindo condições de crescimento sobre a Lagrangiana pode-se obter resultados de regularidade de soluções.

Agradecimentos

Este trabalho contou com o apoio do processo 2014/24271-6, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

Referências

[1] F. Clarke. *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control.* Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, London, 2013.