UMA PROPOSTA PARA CONTROLE DO PÊNDULO

Jeferson Cassiano*

*Universidade Federal do ABC
avenida do Estado, 5001
Santo André, São Paulo, Brasil

Email: jeferson.cassiano@ufabc.edu.br

Abstract— The vector field associated to pendulum equation may to be view as a perturbation of a integrable system. From the orbits integrable system seeks to associate a vector field where this neighborhood is chosen stable limit cycle, using averaging of tools and the first return applications.

Keywords— Control of chaos, pendulum, averaging, stability, integrability.

Resumo— O campo vetorial associado à equação do pêndulo pode ser vista como uma perturbação de um sistema integrável. A partir de órbitas no sistema integrável associado procura-se um campo nesta vizinhança onde o ciclo limite escolhido é estável, utilizando-se de ferramentas com averaging e aplicações do primeiro retorno.

Palavras-chave— Controle de Caos, pêndulo, média, estabilidade, integrabilidade.

1 Introdução

Seja o campo vetorial $\mathbf{f}_0 : S^1 \times R \to T\left(S^1 \times R\right), \ \mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}_0(\mathbf{x})$ tal que

$$[\mathbf{f}_0(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin(x_1) \end{bmatrix} \tag{1}$$

Tal campo representa a dinâmica do pêndulo simples. Tal sistema pode modelar, por exemplo, rotores excêntricos ou manipuladores robóticos.

Um Hamiltoniano para tal sistema é

$$\mathcal{H} : S^1 \times R \to R, \ \mathbf{x} \mapsto 2\sin^2\left(\frac{x_1}{2}\right) + \frac{x_2^2}{2} \tag{2}$$

A Teoria de Controle tem como objeto de estudo a ação de familias de campos de vetores em variedades diferenciáveis. Assim, consideraremos ao longo do texto algumas perturbações do campo 1 e seu comportamento. Matematicamente, pretendemos identificar a topologia dos conjuntos minimais, as bifurcações e a integrabilidade dos sistemas.

Um modelo mais realístico para o pêndulo é dado pelo seguinte campo: $\mathbf{f} : T^2 \times R \to T\left(T^2 \times R\right), \ \mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x})$ sendo

$$[\mathbf{f}(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} \omega \\ x_2 \\ f(x_0, x_1, x_2) - \sin(x_1) - \mu x_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

com $\mu > 0$. Dentre as questões relevantes na Teoria de Sistemas Dinâmicos destacam-se a existência de conjuntos minimais, sua topologia, a variação da mesma no espaço de parâmetros e a integrabilidade.

Já na Teoria de Controle destaca-se a determinação do campo vetorial para o qual o sistema apresenta um comportamento previamente escolhido. Ver por exemplo (Sinha and Ravindra, 2000) e (Rafikov and Balthazar, 2004) para o caso de sistemas caóticos. Para o caso de sistemas mecânicos ver (Pontes et al., 2000). Neste aspecto a integrabilidade tem um papel importante ao conferir a propriedade da controlabilidade aproximada ao sistema e garantir a existência de conjuntos densos de órbitas fechadas.

2 Resultados Principais

Nesta seção apresentam-se alguns resultados com respeito a bifurcações em perturbações de 1 e topologia de conjuntos minimais. Seja a perturbação invariante de 1 da forma $\mathbf{f}_0 + \mu\mathbf{f}_1$ sendo

$$[\mathbf{f}_1(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha - x_2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Sem perda de generalidade suponha que $\alpha > 0$. Segue o seguinte resultado com respeito a bifurcações.

Lema 1 *O campo 1 com a perturbação 4 apresenta uma bifurcação sela-nó com ponto de retorno em* $\boldsymbol{x}^* = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$. *Há um ponto de equíbrio estável e um instável tipo sela hiperbólica para* $\mu\alpha < 1$, *porém não há singularidade para* $\mu\alpha > 1$.

Apesar do teorema anterior estabelecer que não há singularidade para $\mu\alpha > 1$, o resultado a seguir mostra que há ao menos um conjunto minimal para este caso.

Lema 2 *Há ao menos um conjunto minimal em* $S^1 \times \left]0, \beta_2\right[: \ \beta_2 > \alpha + \frac{1}{\mu}$ *para* $\mu\alpha > 1$.

O próximo resultado identifica a topologia do conjunto minimal após a bifurcação.

Teorema 3 *O sistema apresenta um ciclo-limite estável da forma* $\boldsymbol{x}(t) = \alpha(t,1) + \boldsymbol{o}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ *para as condições* $\mu\alpha > 1$ *e* α *suficientemente grande.*

Pode-se dizer que um sistema modelado pela equação do pêndulo descreve antes da bifurcação, por exemplo, um rudimentar manipulador robótico e após a mesma um rotor com excentricidade.

Um problema fundamental para a Teoria de Controle é a estabilidade de uma órbita fechada no problema não integrável o que, na teoria clássica, é obtida através do campo linear no espaço tangente a uma singularidade hiperbólica.

3 Prova dos Resultados Principais

Nesta seção faz-se a demonstração dos resultados apresentados na seção anterior. Após isto realiza-se uma discussão sobre as órbitas fechadas e a existência de um campo na vizinhaça do campo integrável onde a mesma é estável.

3.1 Prova do Lema 1

A prova do primeiro teorema é baseada unicamente em um estudo qualitativo do problema perturbado.

Prova: Seja o campo perturbado

$$\mathbf{X} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + (\mu\alpha - \sin x_1 - \mu x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \qquad (5)$$

Note que o sistema perturbado apresenta as seguintes singularidades: $\mathbf{x}_A^* = (\theta, 0)$ e $\mathbf{x}_B^* = (\pi - \theta, 0)$ sendo $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $\sin\theta = \alpha\mu$. Assim, o sistema admite singularidade se $\alpha\mu \le 1$. Considere que $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$. O polinômio característico do campo linear é $\lambda^2 + \mu\lambda + \cos x_1^*$. Se $x_1^* = \theta \Rightarrow \cos x_1^* > 0 \Rightarrow Re(\lambda_{1,2}) < 0$ o que indica que a singularidade é estável. Se $x_1^* = \pi - \theta \Rightarrow \cos x_1^* < 0 \Rightarrow \lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$ o que indica que a singularidade é uma sela hiperbólica. Para $\theta = \frac{\pi}{2}$ há uma única singularidade em $\mathbf{x}_c = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ e a mesma não é hiperbólica, pois $\lambda_2 = 0$. Então $\mathbf{x}_c$ é um ponto de retorno. □

O resultado anterior evidencia uma transição qualitativa no comportamento o sistema. Os teoremas que seguem indicam uma auto-oscilação.

3.2 Prova do Lema 2

Este resultado consiste em um teorema de existência de conjunto minimal. O mesmo faz-se necessário devido à inexistência de singularidades do campo 5 para $\mu\alpha > 1$. Para a demonstração será utilizada a extensão do Princípio da Invariância de LaSalle. Ver, por exemplo, (Barbashin, 1970).

Prova: Seja o campo escalar $h(\mathbf{x}) = x_2$. Note que, como $S^1 \times R$ é um cilindro, o setor cilíndrico $C_0 = S^1 \times [\beta_1, \beta_2]$ é compacto com bordo $\partial C_0 = S^1 \times \{\beta_1\} \cup S^1 \times \{\beta_2\}$. Assim, basta verificar a existência de $\beta_1, \beta_2 \in R$ tal que o campo esteja orientado para o interior de C_0. Seja a derivada de Lie $\mathcal{L}_{\mathbf{X}} h(\mathbf{x}) = \mu\alpha - \sin x_1 - \mu x_2$. Note que $\mathcal{L}_{\mathbf{X}} h(x_1, 0) = \mu\alpha - \sin x_1 > \mu\alpha - 1 > 0$. Seja $\beta_2 > \alpha + \frac{1}{\mu}$, então $\mathcal{L}_{\mathbf{X}} h(x_1, \beta_2) = \mu\alpha - \sin x_1 - \mu\beta_2 < -1 - \sin x_1 \le 0$. □

Assim este este resultado assegura existência de conjunto minimal a despeito da inexistência de singularidade do campo.

3.3 Prova do Teorema

A prova deste resultado faz uso do Teorema da Média (Guckenheimer and Holmes, 1983).

Prova: Sejam a translação $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \alpha\hat{\mathbf{e}}_2$ e a homotetia $\tau = \alpha t$. Chamando $\epsilon = \frac{1}{\alpha} :\ 0 < \epsilon << 1$. Então o campo resultante é

$$\mathbf{Y} = (1 + \epsilon y_2) \frac{\partial}{\partial y_1} - \epsilon (\sin y_1 + \mu y_2) \frac{\partial}{\partial y_2} \qquad (6)$$

Note que o campo 6 é uma perturbação do oscilador harmônico e $y_1(\tau) = \tau + o(\epsilon) \Rightarrow x_1(t) = \alpha t + o(\epsilon)$. Assim temos a equação $\frac{dy_2}{dy_1} = -\epsilon\left(\frac{\sin y_1 + \mu y_2}{1 + \epsilon y_2}\right) = \epsilon g(y_1, y_2, \epsilon)$. A equação média associada é $\frac{d\bar{y}_2}{dy_1} = -\epsilon\mu\bar{y}_2$ estável na origem. Pelo Teorema da Média, existe uma órbita fechada estável satisfazendo $y_2(\tau) = o_1(\epsilon) \Longrightarrow x_2(t) = \alpha + o(\epsilon)$. □

Este teorema responde à última questão sobre o conjunto minimal: sua topologia.

4 A Questão da Integrabilidade

Seja o campo na forma $\mathbf{f} : T^2 \times R \to T\left(T^2 \times R\right)$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}_0(\mathbf{x})$ sendo $[\mathbf{f}(\mathbf{x})] =$

$$\begin{bmatrix} \omega \\ x_2 \\ -\sin(x_1) \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha\cos(x_0) - x_2 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

A dinâmica desenvolve-se em uma folheação de toros T^2: um toro sólido. Segue um resultado de existência de conjunto minimal para tal campo.

Lema 4 *Existe pelo menos um conjunto minimal para o sistema dinâmico descrito por 7 em $T^2 \times [-\beta, \beta]$ para $\beta > \alpha + \frac{1}{\mu}$.*

Prova: Aqui também faz-se uso de uma Extensão do Principio da Invariância de LaSalle. Ver (Barbashin, 1970) Como $T^2 \times R$ é uma folheação de toros T^2, $T^2 \times [-\beta, \beta]$ é compacto e $\partial\left(T^2 \times [-\beta, \beta]\right) = T^2 \times \{-\beta\} \cup T^2 \times \{\beta\}$. Assim, basta verificar que o campo esta orientado para o interior de $T^2 \times [-\beta, \beta]$. Seja o campo escalar $h(\mathbf{x}) = x_2$. Então a derivada de Lie é dada por $\mathcal{L}_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x}) = \mu\alpha\cos(x_0) - \sin(x_1) - \mu x_2$. Note que $-(\mu\alpha + 1 + \mu x_2) \le \mathcal{L}_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x}) \le \mu\alpha + 1 - \mu x_2$. Assim, se $\beta > \alpha + \frac{1}{\mu} \Rightarrow -(\mu\alpha + 1 + \mu\beta) < 0 \le \mathcal{L}_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x}) \le 0 < \mu\alpha + 1 + \mu(-\beta)$. □

O resultado anterior assegura que, independentemente da natureza da estabilidade do sistema, o mesmo é globalmente estável. Na realidade pode-se provar que tal sistema é localmente instável para determinadas condições.

4.1 Integrabilidade

O campo integrável 1 tem como fluxo $\varphi_t(\mathbf{x}) = 2\left(am\left(\Omega t-\phi,\frac{1}{\Omega}\right), dn\left(\Omega t-\phi,\frac{1}{\Omega}\right)\right)$ sendo $2\Omega^2 = 2\sin^2\left(\frac{x_1}{2}\right)+\frac{x_2^2}{2}$ uma intrgral primeira e $\phi = F\left(-x_1,\frac{1}{\Omega}\right)$ outra integral. am e dn são funções elípticas Jacobianas e F é uma integral elíptica. A órbita homoclínica, para condições iniciais $\mathbf{x}_H = (0,2)$, é dada por $\varphi_t(\mathbf{x}_H) = \pm 2\left(arcsin\left(tgh\left(t\right)\right), -sech\left(t\right)\right)$.

Para estabelecer condições para integrabilidade seja $\mu = \epsilon : 0 < \epsilon << 1$. Assim tem-se o seguinte resultado

Lema 5 *O sistema descrito por 7 é integrável se* $\alpha < \frac{4}{\pi}cosh\left(\frac{\omega\pi}{2}\right)$ *e não-integrável para* $\alpha > \frac{4}{\pi}cosh\left(\frac{\omega\pi}{2}\right)$.

Prova: A prova deste lema é baseada no critério de Mel'nikov. Ver (Guckenheimer and Holmes, 1983). A função de Poincaré-Mel'nikov para este sistema em relação à órbita homoclínica acima é $M(t) = 2\left[\alpha\pi sech\left(\frac{\omega\pi}{2}\right)\cos(\omega t)-4\right]$. Para que esta tenha zeros simples basta que $\alpha > \frac{4}{\pi}cosh\left(\frac{\omega\pi}{2}\right)$ e, por outro lado, que não tenha zeros basta que $\alpha < \frac{4}{\pi}cosh\left(\frac{\omega\pi}{2}\right)$. □

O critério de Mel'nikov preve a persistência de estruturas homoclínicas, o que implica, pelo Teorema de Smale-Birkhoff, na existência do mapa da ferradura, ver (Guckenheimer and Holmes, 1983) e (Hirsch et al., 2003). Assim temos um conjunto enumerável de órbitas fechadas de período arbitrariamente longo.

Considere, agora, o caso não-perturbado associado a 7. Note que tal sistema apresenta um conjunto enumerável de toros com órbitas de períodos iguais a $nK(\Omega) = \frac{2\pi m}{\omega}$ tais que $\frac{m}{n} = \frac{K\omega}{2\pi} \in Q$ sendo $K(\Omega)$, dado por uma integral elíptica, o período das funções elípticas dadas acima.

As técnicas usuais de controle, por exemplo OGY, exigem que primeiramente localizem-se órbitas fechadas no sistema não integrável. Devemos determinar as órbitas fechadas que persistem no caso não integrável.

Lema 6 $\int_0^{\frac{2\pi m}{\omega}} x_2(t)\left(\alpha\cos(\omega t)-x_2(t)\right)dt = 0$, $x_2(t) = 2dn\left(\Omega t-\phi,\frac{1}{\Omega}\right)$, $\Omega = K^{-1}\left(\frac{2\pi m}{\omega n}\right)$, $m \in Z$, $n \in Z^* \Rightarrow$ *esta é uma órbita fechada persistente.*

Prova: Note que o problema não perturbado tem hamiltoniano dado por 2. Assim pode-se mostrar facilmente que, para o problema perturbado tem-se que $\dot{\mathcal{H}} = \epsilon x_2\left(\alpha\cos(\omega t)-x_2\right)$. Note no sistema não perturbado, a órbita é fechada sobre um toro. Para o caso perturbado pode-se considerar a variação de $\dot{\mathcal{H}}$ ao longo desta trajetória com um erro da órdem de ϵ^2(Arnold, 1985). Então $\Delta\mathcal{H} = \epsilon\int_0^{\frac{2\pi m}{\omega}} x_2(t)\left(\alpha\cos(\omega t)-x_2(t)\right)dt + o\left(\epsilon^2\right)$. Note que com as condições do lema, a órbita é fechada. □

Então deve-se testar as órbitas fechadas do sistema integrável e ver se as mesmas persistem no caso não integrável. O número de testes é finito, pois, pelo Teorema de Smale-Birkhoff, existe o mapa da ferradura se há persistêcia de órbitas homoclínicas e neste mapa a um conjunto enumerável de órbitas fechadas do tipo sela-hiperbólica.

Ao localizar tal órbita, basta estabilizá-la. Pode-se fazer isto utilizando o Teorema da Média (Guckenheimer and Holmes, 1983), fazendo uma alocação de polos no sistema médio. Seja $G(\Omega) = \int_0^{\frac{2\pi m}{\omega}} x_2(t)\left(\alpha\cos(\omega t)-x_2(t)\right)dt$. Se $G(\Omega_0) = 0$ e $G'(\Omega_0) > 0$ basta dereminar um controle de forma que $G_1(\Omega_0) = 0$ e $G_1'(\Omega_0) < 0$

5 Contribuição deste artigo

Este trabalho visa sugerir algumas ideias para o controle de caos utilizado algumas das propriedades do mesmo, a saber: conjunto enumerável de órbitas fechadas de período arbitrariamente longo a ser estabilizada pelo controlador; e órbita densa, que confere controlabilidade aproximada ao sistema. Faz-se isto aplicando-se, como estudo de caso, ao problema do pêndulo, de interesse teórico (Arnold, 1985).

6 Conclusões

A estrategia de controle utilizando-se das propriedades do caos apresenta inúmeras vantagens dentre as quais o baixo esforço de controle. Para isto utilizou-se como exemplo o problema do pêndulo. A determinação de uma órbita fechada a partir de órbitas fechadas no sistema integrável parece ser um caminho promissor.

Agradecimentos

O autor agradece ao suporte do projeto FP7-PEOPLE-2012-IRSES-316338 da Fundação Erasmus da União Europeia.

Referências

Arnold, V. (1985). *Ordinary Differential Equations*, Editora Mir.

Barbashin, E. A. (1970). *Introduction to the Theory of Stability*, Noordhoff: Groningen.

Guckenheimer, J. and Holmes, P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields*, Springer - Ver-lag. DOI: 10.1007/978-1-4612-1140-2

Hirsch, M. W., Smale, S. and Devaney, R. L. (2003). *Diferential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos*, Elsevier.

Pontes, B. R., Oliveira, V. A. and Balthazar, J. M. (2000). On friction-driven vibrations in a mass block-belt-motor system with a limited power supply, *Journal of Sound and Vibration* **234**: 713–723. DOI: 10.1006/jsvi.2000.2882

Rafikov, M. and Balthazar, J. (2004). On optimal control design for rossler system, *Physics Let-ters*. DOI: 10.1016/j.physleta.2004.10.032

Sinha, S. C. and Ravindra, B. (2000). A general approach in the design of active controllers for nonlinear systems exhibiting chaos, *International Journal of Bifurcations and Chaos* **10**: 165–178. DOI: 10.1142/S0218127400000104

