

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Análise Não Linear da Dinâmica da Altura de um Fluido num Reservatório

Renan Gabbi¹Luciane Scarton²Geferson G. W. M. da Silva³Luiz A. Rasia⁴Antonio C. Valdiero⁵

Departamento de Ciências Exatas e Engenharias, UNIJUÍ, Ijuí, RS

Resumo. Este trabalho trata da modelagem matemática não linear da dinâmica da altura de um fluido em um reservatório, considerando a perda de carga que este sofre durante o escoamento por um orifício de saída. A perda de carga se deve ao atrito entre o fluido e a restrição no orifício de saída do reservatório, que pode variar de acordo com o diâmetro do orifício de saída. Formula-se o modelo matemático para a dinâmica do sistema não linear que representa o comportamento do escoamento do fluido, considerando-se a perda de carga no termo da energia cinética do fluido, e faz-se a análise da estabilidade do sistema pelo método de *Lyapunov*. Testes experimentais permitem determinar o parâmetro do sistema considerando a perda de carga. Os resultados de simulação computacional do modelo proposto são comparados com os do modelo tradicional sem perda de carga e também validados com os resultados dos testes experimentais. Os resultados da análise dinâmica não linear da altura do fluido num reservatório contribui para o projeto, a simulação e o controle de sistemas hidrodinâmicos.

Palavras-chave. Modelagem Matemática, Perda de Carga, Não Linearidade, Dinâmica dos Fluidos, Estabilidade

1 Introdução

Os sistemas de controle de nível de líquidos em tanques são amplamente utilizados em processos industriais [4]. Tradicionalmente, o modelo matemático da dinâmica do nível de fluido em tanques é obtida através do balanço de massa e do balanço de energia do sistema [5].

O presente trabalho tem como contribuições o desenvolvimento de um conjunto de equações matemáticas que permite descrever o comportamento da altura do fluido num reservatório, incluindo-se a perda de carga no orifício de saída. Além de agregar a análise

¹renan.gabbi@unijui.edu.br

²lucianescarton@hotmail.com

³geferson_gustavo@hotmail.com

⁴rasia@unijui.edu.br

⁵valdiero@unijui.edu.br

não linear pelo método direto de *Lyapunov* [7] e ilustrar as características não lineares do modelo proposto com resultados experimentais e computacionais, comparando-o com o modelo tradicional [3].

Os sistemas físicos apresentam-se como não lineares e o seu comportamento pode ser descrito por uma equação diferencial [5]. Neste trabalho, o modelo se configura de primeira ordem e não linear, caracterizado por um escoamento linear com perdas de cargas por fricção, ou seja, a velocidade do fluido no centro é maior em relação às proximidades das paredes. Sistemas não lineares não obedecem ao princípio da sobreposição, podendo se apresentar de forma bastante complexa de difícil solução [6]. Desta forma é importante o conhecimento e utilização de outros métodos de resolução, como por exemplo a equação de *Bernoulli*, a qual apresenta vasta aplicação na modelagem matemática de sistemas não lineares [2].

O conhecimento das leis físicas que estão envolvidos no sistema é de suma importância para que se estabeleçam modelos matemáticos que descrevam com maior proximidade um fenômeno real. É possível resolver uma equação não linear, fazendo uma mudança de variável dependente que a transforma em uma equação linear [2].

Existem importantes relações entre pressão, velocidade e a altura no escoamento de um fluido ideal, as quais são consideradas pela equação de *Bernoulli* [4]. Sistemas dinâmicos podem ser descritos por relações de entrada/saída ou por variáveis internas denominadas variáveis de estado. A linearização do sistema é importante para avaliar a estabilidade do mesmo. Essa técnica utiliza a definição de variáveis de estado, tornando os cálculos mais simples na medida em que possíveis soluções são associadas a determinados parâmetros. O ponto de equilíbrio corresponde aos valores do estado no qual o sistema permanece constante no tempo [1], é importante mencionar que ao contrário dos sistemas lineares, os sistemas não lineares podem possuir múltiplos pontos de equilíbrio.

A primeira publicação teórica sobre a estabilidade de sistemas de controle não lineares citado por [6], foi realizada em 1892, por *Lyapunov*, que hoje se designa por *função de Lyapunov*. Os sistemas não lineares, podem ser analisados teoricamente através do método de *Lyapunov*. O método direto de *Lyapunov* baseia-se na existência de uma função a qual deve ser definida positiva em todo seu domínio, radialmente e sua derivada ao longo da solução do sistema deve ser definida negativa em todo o domínio, para garantir a estabilidade do sistema não linear [7]. Sendo portanto um método eficiente no controle da estabilidade do sistema.

2 Descrição da Bancada Experimental

O processo para a validação do modelo iniciou-se com a utilização de uma bancada experimental composta por um reservatório de fluxo em formato cilíndrico. Na parte inferior do recipiente tem-se um orifício lateral de área A_2 , por onde escoar a água, na lateral está marcando a altura do reservatório de acordo com a Figura 1.

A Tabela 1 apresenta os principais valores dos parâmetros construtivos e característicos da bancada experimental utilizada na modelagem matemática e validação experimental. Cronometrou-se o escoamento do fluido pela altura da coluna (representada na Figura 1,

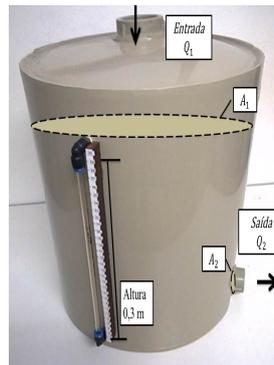


Figura 1: Bancada experimental.

como um “cano transparente”) associada ao reservatório até esvaziar completamente o reservatório. Os registros dos dados foram obtidos através de filmagens.

Tabela 1: Valores adotados para os parâmetros do modelo matemático de acordo com a bancada da Figura 1.

Descrição do parâmetro	Notação	Valores	Observações:
Altura inicial da coluna do fluido	h	0,3 m	Medição com régua
Diâmetro da entrada	d_1	0,312 m	Medição com régua
Diâmetro da saída	d_2	0,2 m	Medição com régua
Aceleração da gravidade	g	$9,81 \text{ m/s}^2$	Referência [5]
Coef.de perda de carga de saída	ξ	1,2	Ajustado por simulações
Vazão de entrada	Q_1	0	Sem vazão (experimental)

Os dados obtidos com o escoamento foram tabelados e escritos em forma matricial, para utilização no *software Matlab*. Utilizou-se o método numérico *Runge-Kutta* de 4ª ordem para integração do sistema de equações, com passo de integração de 10^{-5} segundos com período de amostragem de 10 segundos.

3 Modelagem Matemática da Dinâmica da Altura de Fluido

Para o processo de validação do modelo foi considerado um reservatório de acordo com a Figura 1, onde Q_2 é a vazão de saída, A_1 a área da seção reta do reservatório e A_2 a área da seção reta de tubulação de saída. Iniciamos a modelagem pelo princípio da conservação da massa, onde a diferença entre a vazão que entra (Q_1), e a vazão que sai (Q_2) é igual a variação do volume (dV) do reservatório em função do tempo (dt), $Q_1 - Q_2 = \frac{dV}{dt}$. Pode-se afirmar que a variação do volume do reservatório, é igual a variação da altura

$$Q_1 - A_2 v_2 = A_1 \dot{h} \tag{1}$$

No modelo que descreve o escoamento do fluido em movimento, aplicamos o princípio da conservação da energia ao escoamento de um fluido ideal, utilizando a equação de *Bernoulli* [5],

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + P_1 + \rho gh_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + P_2 + \rho gh_2 \dot{h} \quad (2)$$

onde P_1 e P_2 são as pressões na entrada e saída do reservatório, sendo ambas equivalentes à pressão atmosférica e podendo ser canceladas. Pode-se considerar que a velocidade v_1 (entrada) é muito menor que v_2 (saída), dadas as proporções das áreas do tanque e da tubulação de saída. Portanto, pode-se considerar que v_1 é desprezível e que a velocidade de escoamento do fluido na saída é $v_2 = \sqrt{2gh}$. Pela substituição de v_2 obtém-se o modelo dinâmico de nível do sistema da Figura 1, dado por $\dot{h} + \frac{A_2}{A_1}\sqrt{2gh}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{A_1}Q_1$, reescrevendo obtemos

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + P_1 + \rho gh_1 = constante \quad (3)$$

As equações (2) e (3) são expressões equivalentes da equação *Bernoulli* [5].

Na prática, os escoamentos nas tubulações sofrem o efeito do atrito acarretando na dissipação de energia do fluido, denominado no modelo como a perda de carga, dependente do diâmetro do bocal de saída. Nesse caso a equação de *Bernoulli* deve ser reescrita da seguinte forma $\frac{1}{2}\rho v_1^2 + P_1 + \rho gh_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + P_2 + \rho gh_2 + \Delta p$, onde o termo $\Delta p = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \xi$ representa a perda de energia no escoamento por atrito, enunciada de forma similar em [8], tem-se $\frac{1}{2}\rho v_1^2 + P_1 + \rho gh_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + P_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \xi$.

Utilizando as hipóteses que $p_1=p_2=p_{atm}$ e a A_1 maior que A_2 então $v_2=0$, tem-se $\rho gh_1 = \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \xi$, subtraindo ρgh_2 em ambos os membros da igualdade e colocando os termos comuns em evidência, obtem-se $\rho g(h_1 - h_2) = \frac{1}{2}\rho v_2^2(1 + \xi)$, em seguida substitui-se $h_1 - h_2$ por h e isolando v_2 tem-se

$$v_2 = \frac{\sqrt{2gh}^{\frac{1}{2}}}{(1 + \xi)^{\frac{1}{2}}} \quad (4)$$

Substituindo (4) em (1) e dividindo-se por A_1 , tem-se $\dot{h} + \frac{A_2}{A_1}\frac{\sqrt{2gh}^{\frac{1}{2}}}{(1 + \xi)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{A_1}Q_1$. Definindo $w_f = \frac{A_2}{A_1}\sqrt{2g}$ e $w_c = \frac{1}{(1 + \xi)^{\frac{1}{2}}}$, obtemos a equação final considerando a perda de carga

$$\dot{h} + \frac{w_f}{w_c}h^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{A_1}Q_1 \quad (5)$$

Inicialmente definem-se as variáveis de estado para determinar os pontos de equilíbrio e a estabilidade no sentido de *Lyapunov*. Assim, considerando $x_1=h$ e $\dot{x}_1=f(x)$ tem se a equação em variável de estado

$$\dot{x}_1 = -\frac{w_f}{w_c}x_1^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{A_1}Q_1 \quad (6)$$

Os pontos de equilíbrio do sistema ocorrem quando a taxa de variação é nula [3]. Portanto a solução para o ponto de equilíbrio é dada por $x_1=0$ que ao substituir em (6) tem-se

$$x_{1e} = \left(\frac{w_c}{w_f} \frac{1}{A_1} Q_1 \right)^2 \quad (7)$$

O ponto de equilíbrio é dado por x_{1e} , raiz da equação algébrica sendo este o ponto em que o sistema pode ficar para sempre sem se mover [7], ou seja, a altura do fluido terá atingido o ponto de equilíbrio x_{1e} quando a vazão que entra igualar-se a vazão de saída do reservatório resultando na altura constante deste fluido para qualquer tempo futuro.

Os métodos diretos baseados na teoria de *Lyapunov* [7] permitem a determinação da região de estabilidade de um sistema dinâmico sem solucionar as equações diferenciais do sistema. Em (6), temos a função de energia $v(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2$, derivando, $\dot{v}(x_1) = x_1\dot{x}_1$. Substituindo x_1 dado em (6) em $\dot{v}(x_1)$ obtemos $\dot{v}(x_1) = -x_1 \frac{w_f}{w_c} \left(x_1^{\frac{1}{2}} - \frac{Q_1}{\frac{w_f}{w_c} A_1} \right)$. Para um sistema estável (método direto de *Lyapunov*) tem-se $-x_1 \frac{w_f}{w_c} \left(x_1^{\frac{1}{2}} - \frac{Q_1}{\frac{w_f}{w_c} A_1} \right) \leq 0$. Para que a derivada da função da energia seja negativa $v(x_1) \geq 0$ e tem-se $\left(x_1^{\frac{1}{2}} - \frac{Q_1}{\frac{w_f}{w_c} A_1} \right) \geq 0$. Da qual obtemos $x_1 \geq \left(\frac{w_c}{w_f} \frac{1}{A_1} Q_1 \right)^2$. Assim concluímos teoricamente que o sistema é estável e irá convergir para um dado ponto de equilíbrio.

4 Resultados

Os resultados das simulações computacionais e dos testes experimentais com o orifício de saída de diâmetro de 0,02 m são comparados na Figura 2(a). Note que sem a não linearidade da perda de carga energética devido ao estreitamento no orifício de saída do fluido, a velocidade teórica do fluido da saída seria maior e a altura do fluido seria mais baixa no mesmo instante de tempo, entretanto a perda de carga que ocorre no sistema dinâmico real tem o efeito de atraso no tempo da dinâmica da altura do fluido no reservatório. Tal não linearidade de perda de energia foi incluída com sucesso no modelo matemático desenvolvido e permitiu a validação experimental, sendo, portanto, muito importante na modelagem matemática para previsão do comportamento da altura do fluido.

O ξ é ajustado conforme a área de estreitamento da saída, observando que quanto maior a área de saída menor o valor de ξ pois aumentado a área de saída do fluido há um aumento de energia e a perda de carga diminui. Para a simulação da Figura 2(a) o valor de ξ é 1,2. Assim o projetista poderá estabelecer a área de vazão e a constante ξ para outros diâmetros por interpolação, de acordo com a Figura 2(a)

Na Figura 2(b) são apresentados a simulação da dinâmica variação da altura inicial em relação ao tempo, como forma de perceber que todos os valores tendem a altura de equilíbrio $x_{1e}=5,1386.10^{-4}$ m determinada a partir da linearização do sistema considerando a altura máxima de 0,30 m. A determinação da estabilidade do sistema é muito

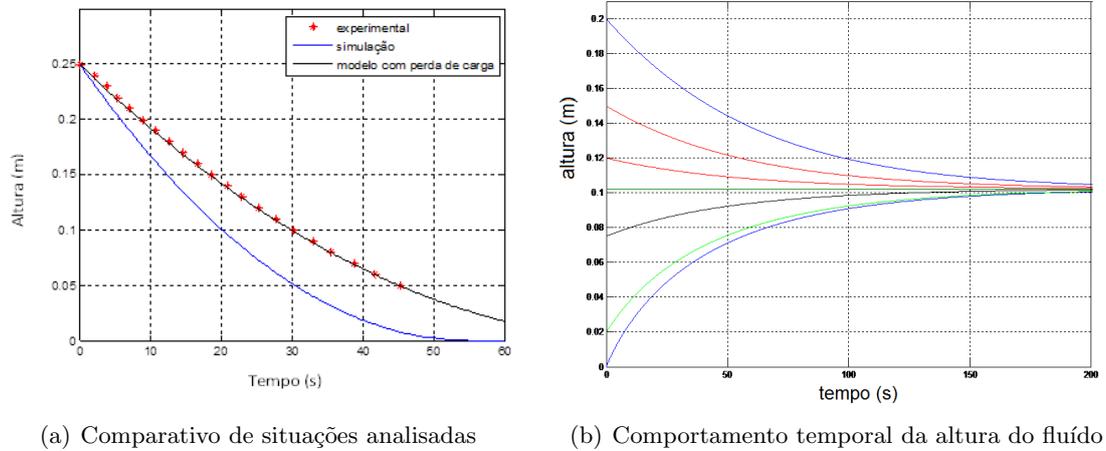


Figura 2: Resultados de Simulações Computacionais e Validação Experimental

importante para projetar o controle das variáveis inerentes ao mesmo, otimizando os resultados obtidos. Para qualquer altura entre 0 e 0,30 m o escoamento do fluido tende para $x_{1e}=5,1386 \cdot 10^{-4}$ m determinando a estabilidade do sistema em torno deste ponto de equilíbrio.

5 Conclusões

Verificou-se que a perda de carga depende do diâmetro do orifício de saída e propõe-se sua inclusão no modelo. Com o modelo proposto é possível descrever matematicamente o comportamento dinâmico do sistema incluindo a não linearidade (perda de carga) no orifício de saída do reservatório, sendo que os resultados obtidos na simulação computacional em comparação com os resultados dos testes experimentais ilustram as características do modelo desenvolvido e a importância da inclusão da não linearidade da perda de carga. Ao analisar a estabilidade, conclui-se que o sistema é estável e converge para um ponto de equilíbrio, a estabilidade ocorre quando a vazão de entrada se iguala a vazão de saída do sistema mantendo o sistema constante em torno deste ponto de equilíbrio, confirmando que independentemente das alturas iniciais adotadas, todas as soluções tenderam para o ponto de equilíbrio (altura). Pretende-se assim contribuir para a percepção da importância dos sistemas dinâmicos não lineares para representar diferentes situações reais. A simulação computacional de um modelo matemático validado experimentalmente possibilita ao projetista especificar os parâmetros construtivos do sistema e alcançar os resultados desejados.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Brasil. Os autores também são agradecidos à

UNIJUÍ pela infraestrutura dos laboratórios do Núcleo de Inovação em Máquina Automáticas e Servo Sistemas (NIMASS), implantado com recursos provenientes do SEBRAE e do FINEP/SEBRAE/MCT, complementado com apoio da FAPERGS e credenciado pela Agência Nacional de Petróleo (ANP, portaria no. 1.542 do D.O.U).

Referências

- [1] L. A. Aguirre. *Introdução à identificação de sistemas - Técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais*. Editora UFMG, Belo Horizonte, 2004.
- [2] L. C. Cardoso e R. F. Camargo. Equação Diferencial de Bernoulli Fracionária, *Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics*, volume 3, 2015. DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0085.
- [3] A. F. Fiori, L. Fransozi, A. C. Valdiero e L. A. Rasia. Análise do ponto de equilíbrio no modelo Lotka-Volterra. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics*, volume 2, 2014. DOI: 10.5540/03.2014.002.01.0082.
- [4] T. C. Lazzarotto, S. Geitenes, and V. A. Gonçalves. Análise do Escoamento de Água a partir de Métodos Numéricos de Interpolação Polinomial. *RETC*, 12:75-82, 2013. ISSN: 2177-0425.
- [5] A.T.W. de Mamann, D. J. B, Freitas, L. A. Valer, O. B. Scremin e A. C. Valdiero. Desenvolvimento da Modelagem Matemática e Validação Experimental da Dinâmica da Altura do Fluido em um Reservatório. In *Anais do Congresso Internacional de Educação Científica e Tecnológica (III CIECITEC)*, Santo Ângelo, Rio Grande do Sul, Brasil, 2015.
- [6] G. V. M. Silva, *Controlo Não Linear*, Escola Superior de Tecnologia Setúbal, Lisboa, 2003.
- [7] J.-J. E. Slotine, W. Li, *Applied nonlinear control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.
- [8] Tigre, *Ficha Técnica Tigre Tubos e Conexões*. Disponível em: www.tigre.com.br. Acesso em: 01 setembro, 2014.