

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Investigação sobre sincronização com homogeneidade entre vizinhos por meio da Transformada *Wavelet* Complexa *Dual-Tree*: resultados preliminares.

Maria Teodora Ferreira¹

Faculdade Bilac e Universidade do Vale do Paraíba - UNIVAP, Brasil

Celso B. N. Freitas²

Programa de Pós-Graduação em Computação Aplicada (CAP) - INPE, Brasil

Margarete O. Domingues³

Elbert E. N. Macau⁴

Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada - LAC,

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE, Brasil

Resumo. O fato de conectar osciladores em grupos mais homogêneos ou heterogêneos modifica o comportamento do sistema como um todo? Trabalhos anteriores com o modelo de Kuramoto indicam que sim: redes com vizinhos mais similares entre si tendem a exibir maior sincronização para forças de acoplamento atrativas fracas. Apresentam-se aqui resultados preliminares com um modelo de atrator caótico não-coerente que também exibem essa propriedade. Esse cenário compreende mais um exemplo de aplicabilidade do método *Discrete Complex Wavelet Approach* - DCWA para atribuição de fase, propiciando o cálculo das métricas de sincronização necessárias.

Palavras-chave. Fase, Sincronização de fase, Transformada *Wavelet* Complexa *Dual-tree*, Redes de osciladores.

1 Introdução

Diversos estudos sobre sistemas multi-agentes, biológicos ou sociais, revelam que seus membros utilizam critérios de seleção não necessariamente aleatórios para o estabelecimento de vínculos. Há cenários nos quais indivíduos tendem a favorecer a heterogeneidade, como por exemplo, mulheres que não tomam pílula anticoncepcional rotularam como sexualmente mais agradável o odor de homens que apresentam maior disparidade genética em relação ao delas [10]. Por outro lado, adolescentes formam laços de amizade sem um critério absoluto de escolha, com a identidade étnica exercendo maior influência do que a orientação acadêmica [11].

¹mteodoraf25@gmail.com

²cbnfreitas@gmail.com

³margarete.domingues@inpe.br

⁴elbert.macau@inpe.br

Dentre questões subjacentes nesse contexto, pode-se perguntar se tais escolhas locais dos elementos influenciam o comportamento global do sistema. Inspirados por essas ideias, apresentam-se aqui avanços na pesquisa iniciada em [6] onde se estudou o impacto sobre a sincronização considerando redes de osciladores de fase não idênticos, sob diferentes padrões de conexão. Consideram-se configurações *similares* ou *dissimilares* as redes cujos elementos são mais homogêneos ou heterogêneos, respectivamente, em relação a seus vizinhos. Na literatura, tais fenômenos são também conhecidos como homofilia e heterofilia. Se não há clara tendência para nenhum desses extremos, dizemos que a configuração é *neutra*.

Para o modelo de Kuramoto com parâmetro de acoplamento fraco, foi detectado que configurações *similares* exibem maior sincronização do que configurações *neutras* e *dissimilares*. A fim de avaliar se este fenômeno também ocorre em cenários mais gerais, apresentam-se aqui experimentos numéricos preliminares considerando-se como elementos ativos da rede osciladores não-coerentes.

Contudo, as métricas utilizadas para quantificar a sincronização requerem a atribuição de uma variável de fase ao sinal, o que não é diretamente obtido pela série temporal de tais osciladores sem centro de rotação bem definido.

Várias técnicas vêm sendo desenvolvidas para a obtenção da fase. Em [4] propõe-se um método, chamado *Discrete Complex Wavelet Approach (DCWA)*, baseado em uma transformada *wavelet*, a Transformada *Wavelet Complexa Dual-Tree (DT-CWT)*, para obter a fase de sistemas caóticos e de conjunto de dados experimentais, a fim de analisar o fenômeno de sincronização de fase. A aplicabilidade do método DCWA já foi verificada em sistemas caóticos de Rössler em regime de fase coerente e não coerente [2, 3], em sistemas caóticos de Lorenz [1] e no Modelo de Kuramoto com diferentes configurações [4, 5].

Como teste de conceito, redes de osciladores Rössler não-coerentes sob acoplamento fraco são consideradas com configurações *similares*, *neutras* e *dissimilares*. Após a integração numérica de tais sistemas, um par de osciladores adjacentes é escolhido aleatoriamente e aplica-se a DCWA para atribuição de fase. A fim de comparar os resultados obtidos da DCWA, também aplica-se a transformada de Hilbert para calcular a fase. Com isso, calcula-se o índice de sincronização parcial [7] com o qual pode-se comparar a emergência da sincronização de fase resultante em cada configuração de vizinhança.

A relevância deste estudo compreende a generalização de parte dos resultados obtidos em [6], apontando que, mesmo para tipos de osciladores mais sofisticados, o grau de similaridade entre o membros e seus vizinhos na rede exerce notável impacto nas características de todo o conjunto. O entendimento e a mimetização desses fenômenos podem ser úteis para uma ampla gama de aplicações envolvendo sincronização em redes, tais como malhas de produção e consumo de energia, propagação de solidariedade em comunidades humanas e o movimento coletivo de veículos autônomos [6]. Mais ainda, a demonstração da aplicabilidade da DCWA [4] para atribuição de fase em mais um contexto também é uma contribuição do presente trabalho.

2 Metodologia para atribuição de fase

Nesta seção apresenta-se o método DCWA para a atribuição de fase. O cálculo da fase via transformada de Hilbert também é descrito.

2.1 DCWA

Em [4] propõe-se um método, chamado *Discrete Complex Wavelet Approach (DCWA)*, o qual baseia-se no uso da Transformada *Wavelet Complexa Dual-Tree* (do inglês, *Dual-Tree Complex Wavelet Transform - DT-CWT*). Na prática, a DT-CWT emprega duas Transformada *Wavelet* Discreta reais. Para informações veja [8,9,12].

O método DCWA consiste em obter a fase a partir dos coeficientes *wavelet* complexo obtidos pela decomposição da série temporal utilizando a DT-CWT. Assim, a série temporal x é analisada em j níveis de decomposição, com $j = 1, \dots, \mathcal{L}$. Em cada nível de decomposição j , o coeficiente *wavelet* complexo \mathbf{d}^j é obtido por meio da análise DT-CWT. Como a DT-CWT é uma transformada decimada, na escala j a dimensão do vetor contendo os coeficientes \mathbf{d}^j é igual a $N^j = 2^{L-j}$, em que N^j denota o número de pontos N na escala j . Em seguida, a energia E^j para cada escala j é calculada como o módulo ao quadrado do coeficiente *wavelet* complexo \mathbf{d}^j por meio da equação $E^j(n) = |\mathbf{d}^j(n)|^2$. O espectro de energia global \mathbb{E}^j é calculado por meio da equação $\mathbb{E}^j = \sum_n E^j(n)$. Posteriormente, procura-se a escala J a qual apresenta a energia global máxima do sistema utilizando-se a condição $\mathbb{E}^J = \max_j \mathbb{E}^j$. Depois de encontrada a escala J , a fase é calculada nesta escala J , denotada por ϕ^J e dada por $\phi^J(t) = \text{atan2}(\underline{d}^J, \bar{d}^J)$. Aqui, \underline{d}^J é a parte imaginária do coeficiente *wavelet* complexo na escala J , \bar{d}^J é a parte real do coeficiente *wavelet* complexo na escala J e a função atan2 é a função arco-tangente de dois argumentos.

2.2 Transformada de Hilbert

A Transformada de Hilbert (TH) de uma dada série temporal $f(t)$ é definida por $\mathcal{H}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{t-\tau} d\tau$. A construção do sinal analítico complexo $\zeta(t)$ a partir da série temporal $f(t)$ utilizando a TH pode ser feita por meio da equação $\zeta(t) = f(t) + \imath f_{\mathcal{H}}(t) = A(t) e^{\imath \phi_{\mathcal{H}}(t)}$, em que $f_{\mathcal{H}}(t)$ é a transformada de Hilbert de $f(t)$. Essa equação fornece a fase $\phi_{\mathcal{H}}(t)$ e a amplitude instantânea $A(t)$.

3 Aplicação

Nesta seção, o método DCWA será aplicado para a obtenção da fase e, posteriormente, na análise de sincronização em redes de osciladores não idênticos acoplados sob configurações *similares*, *neutra* e *dissimilares* introduzidas em [6].

Considere-se \mathcal{A} um grafo simples e conectado com N vértices e E arestas. Além disso, $\omega_1, \dots, \omega_n \in \mathbb{R}$ parametrizam a dinâmica desacoplada de cada um dos N osciladores, ou seja, desconsiderando-se qualquer influência de outros osciladores. Ao permitir somente

a permutação dos N osciladores, caracterizados por seus parâmetros ω_i , dentre os N vértices do grafo \mathcal{A} , chamamos de configurações *similares* ou *dissimilares* as permutações que favorecem vizinhos homogêneos ou heterogêneos, respectivamente. Por outro lado, na ausência de forte tendência homogênea ou heterogênea, diz-se que há uma configuração *neutra*. A definição matemática e os algoritmos para obtenção de tais configurações podem ser encontrados em [6]. Para o escopo deste trabalho, ilustra-se tais conceitos com redes do tipo Watts-Strogatz com $N = 100$ osciladores e $E = 200$ arestas, conforme mostrado na Figura 1. Nesse exemplo $\omega_1, \dots, \omega_N$ foram escolhidos aleatoriamente com distribuição uniforme entre 0.9 e 1.1.

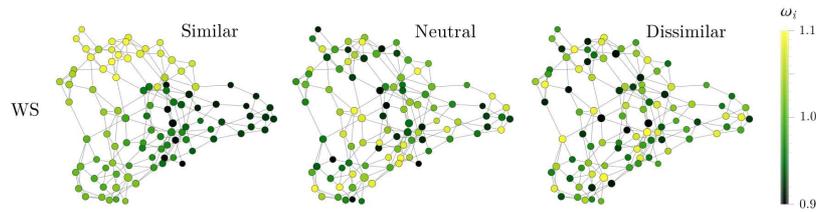


Figura 1: Redes *similares*, *neutras* e *dissimilares* estudadas neste artigo.

Ainda em [6], para valores baixos de acoplamentos em um modelo de Kuramoto com osciladores não-idênticos, foram apresentadas evidências numéricas de que redes *similares* exibem maior sincronização do que redes *neutras* e *dissimilares*. Neste trabalho, apresentam-se resultados preliminares por meio do método DCWA de que o mesmo fenômeno ocorre para outros tipos mais gerais de osciladores, a saber, osciladores de Rössler não-idênticos com atrator não-coerente.

A dinâmica que rege cada oscilador $i = 1, \dots, N$ é definida por [2]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -\omega_i y_i - z_i \\ \dot{y}_i &= \omega_i x_i + a y_i + \eta \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (y_j - y_i) \\ \dot{z}_i &= b + z_i(x_i - c), \end{aligned} \quad (1)$$

em que $\eta \in \mathbb{R}$ é o parâmetro de acoplamento do sistema; \mathcal{N}_i representa o conjunto dos nós adjacentes ao vértice i . Utilizam-se $a = 0.2925$, $b = 0.4$, $c = -8.5$, a fim de obter-se atratores Rössler não-coerentes, ou seja, sem um centro de rotação bem definido. A caracterização das dinâmicas não-idênticas na redes são representadas pelo parâmetro ω_i . A Fig. 2 exibe trajetórias dos osciladores desacoplados ($\eta = 0$) para diferentes valores de ω_i .

Escolhe-se heurísticamente um valor baixo de acoplamento ($\eta = 0.05$) e efetua-se a integração numérica do sistema 1 a partir de condições iniciais aleatórias próximas à região do atrator caótico. Esse procedimento foi repetido para cada uma das três configurações de vizinhança. A partir daí atribuí-se variáveis de fase via DCWA utilizando-se a coordenada x para dois dos osciladores na rede, $i = 1, 2$. Com isso, pode-se computar o chamado

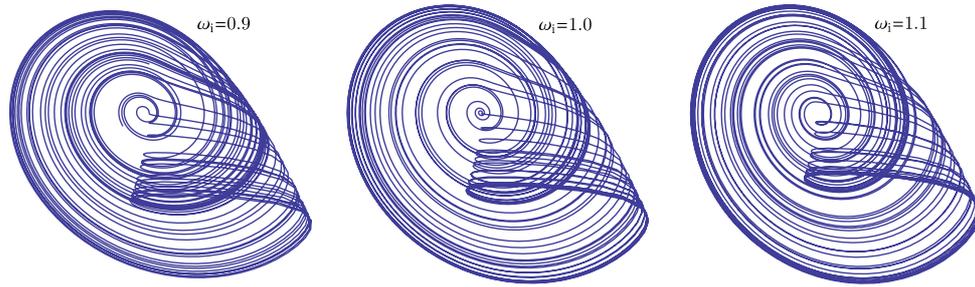


Figura 2: Projeção no plano x, y dos osciladores de Rössler não-coerentes isolados, com diferentes valores do parâmetro ω_i .

índice de sincronização parcial [7] entre esse par de osciladores

$$S = S_{1,2} = S_{2,1} := \left| \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{t_r}^{t_r + \Delta t} e^{i(\theta_1(t) - \theta_2(t))} dt \right|,$$

em que t_r é o tempo de transiente suprimido, no nosso caso, utilizou-se 100u.t. Os osciladores 1, 2 entram em travamento de fase, isto é, $\theta_i(t) - \theta_j(t)$ converge para uma constante, se e somente se, $S_{ij} = 1$. A medida que esse índice decresce, formas mais fracas de sincronização começam a aparecer. Finalmente, $S_{ij} \approx 0$ indica ausência de sincronização, quando as trajetórias dos osciladores estão muito pouco relacionadas. Em suma, pode-se interpretar que quanto mais próximo S está de 1, maior a sincronização entre o par de osciladores.

A fim de comparar os resultados obtidos do índice de sincronização via atribuição de fase usando a DCWA, utilizou-se também a transformada de Hilbert para a atribuição de fase. A Tabela 1 apresenta os índices de sincronização computados entre o par de osciladores 1, 2 para a configuração *similar*, *neutra* e *dissimilar* considerando a utilização da DCWA e da Transformada de Hilbert para atribuição de fase.

Tabela 1: Índices de sincronização computados entre o par de osciladores 1, 2 para a configuração *similar*, *neutra* e *dissimilar* considerando a utilização da DCWA e da transformada de Hilbert na atribuição de fase.

Configuração	DCWA	Hilbert
<i>similar</i>	$S = 0.404$	$S = 0.343$
<i>neutra</i>	$S = 0.216$	$S = 0.191$
<i>dissimilar</i>	$S = 0.181$	$S = 0.156$

Portanto, também nesta classe de osciladores, observa-se que a emergência da sincronização ocorre de maneira mais proeminente para redes *similares*, considerando-se valores

fracos de acoplamento. Nota-se que na Tabela 1 os valores dos índices de sincronização são semelhantes entre as duas técnicas utilizadas, sendo os valores da DCWA sempre ligeiramente superiores.

4 Conclusão

Neste trabalho, avalia-se que a técnica *Discrete Complex Wavelet Approach* (DCWA) é eficiente para o cálculo das fases em rede de osciladores de Rössler não idênticos e não-coerentes. A partir daí, pode-se computar o índice de sincronização entre dois nós da rede e observar que configurações *similares* exibem níveis mais altos de sincronização em relação a redes *neutras* e *dissimilares*. Por ser uma técnica mais simples de aplicação e ter características multiescala pretende-se futuramente estender esse estudo para estudar a evolução da sincronização considerando-se todos os nós da rede, outros valores de acoplamento, bem como outros tipos de grafos de acoplamento.

5 Agradecimento

À CAPES e ao CNPq (processos números 309667/2013-5, 306828/2010-3, 306038/2015-3, 483226/2011-4, 10571/13-2, 304582/2010-7) e FAPESP (2011/50151-0) pelo suporte financeiro a este trabalho.

Ao prof. Nick Kingsbury pelo algoritmo da DT-CWT e por ter apresentado dois minicursos sobre este assunto no WWlet/CNMAC 2012.

Referências

- [1] M. T. Ferreira, R. Follmann, M. O. Domingues, and E. E. N. Macau. Aplicação da transformada wavelet complexa dual-tree na detecção de sincronização de fase entre sistemas caóticos de Lorenz. In *Anais do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional - CMAC Sudeste*, Bauru, São Paulo, Brasil, 2013.
- [2] M. T. Ferreira, R. Follmann, M. O. Domingues, and E. E. N. Macau. Detecting phase synchronization in coupled chaotic noncoherent oscillators by using complex wavelet transform. In *11th International Conference on Vibration Problems - ICOVP*, Lisbon, 2013.
- [3] M. T. Ferreira, R. Follmann, M. O. Domingues, and E. E. N. Macau. Transformada wavelet complexa dual-tree e a detecção da sincronização de fase entre sistemas com dinâmica caótica. In *10th Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações - DINCON*, Águas de Lindóia, São Paulo, Brasil, 2011. DOI: 10.5540/DINCON.2011.001.1.0184.
- [4] M. T. Ferreira, C. B. N. Freitas, M. O. Domingues, and E. E. N. Macau. The discrete complex wavelet approach to phase assignment and a new test bed for related methods. *Chaos*, 25(1), 2015. DOI: 10.1063/1.4906814.

- [5] M. T. Ferreira, C. B. N. Freitas, M. O. Domingues, and E. E. N. Macau. Modelo de kuramoto e a verificação da diferença de fase usando uma metodologia baseada na transformada wavelet complexa dual-tree: resultados preliminares. In *Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics*, 2013.
- [6] C. Freitas, E. Macau, and R. L. Viana. Synchronization versus neighborhood similarity in complex networks of nonidentical oscillators. *Phys. Rev. E*, 92(3):032901, 2015. DOI: 10.1103/PhysRevE.92.032901.
- [7] J. Gómez-Gardeñes, Y. Moreno, and A. Arenas. Paths to synchronization on complex networks. *Phys. Rev. Lett.*, 98:034101, 2007. DOI: 10.1103/PhysRevLett.98.034101.
- [8] N. Kingsbury. Complex wavelets for shift invariant analysis and filtering of signals. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 10(3):234–253, 2001. DOI: 10.1006/acha.2000.0343.
- [9] N. Kingsbury. Image processing with complex wavelets. *Phil. Trans. Royal Society A*, 357(1760):2543–2560, 1999. DOI: 10.1098/rsta.1999.0447.
- [10] P. S. C. Santos, J. A. Schinemann, J. Gabardo, and M. G. Bicalho. New evidence that the mhc influences odor perception in humans: a study with 58 southern brazilian students. *Horm. Behav.*, 47(4):384–388, 2005. DOI: 10.1016/j.yhbeh.2004.11.005.
- [11] D. Schultz and S. E. Schultz. *Theories of personality*. Cengage Learning, USA, eleventh edition edition, 2012.
- [12] I. W. Selesnick, R. G. Baraniuk, and N. G. Kingsbury. The dual-tree complex wavelet transform. *IEEE Signal Proc. Mag.*, 22(6):123–151, 2005. DOI: 10.1109/MSP.2005.1550194.