Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

O Problema de Corte de Estoque Bidimensional Multiperíodo

Kelly Cristina Poldi[1]
Departamento de Matemática Aplicada, IMECC-UNICAMP, Campinas, SP
Silvio Alexandre Araújo[2]
Departamento de Matemática Aplicada, IBILCE-UNESP, São José do Rio Preto, SP

Resumo. O problema de corte de estoque multiperíodo surge imerso no planejamento e programação da produção em empresas que têm um estágio de produção caracterizado pelo corte de peças. As demandas dos itens ocorrem em períodos diversos de um horizonte de planejamento finito, sendo possível antecipar ou não a produção de itens. Os objetos disponíveis em estoque não utilizados em um período ficam disponíveis no próximo período, juntamente com novos objetos adquiridos ou produzidos pela própria empresa. Um modelo de otimização linear inteira de grande porte foi proposto na literatura para o caso unidimensional e o método simplex com geração de colunas foi especializado para resolver a relaxação linear do modelo proposto. Neste trabalho estendemos o modelo e o método para o caso bidimensional. Foram realizados experimentos computacionais que mostram que ganhos efetivos podem ser obtidos usando-se o modelo de corte de estoque multiperíodo, quando comparado com a solução lote-por-lote, tipicamente utilizada na prática.

Palavras-chave. Problema de corte. Bidimensional. Multiperíodo. Programação linear. Geração de colunas. Grafo E/OU.

1 Introdução

Problemas de corte de estoque consistem em cortar peças maiores (objetos) disponíveis em estoque com a finalidade de produzir peças menores (itens) para atender uma dada demanda, otimizando uma determinada função objetivo que pode ser, por exemplo, minimizar a perda de material ou o custo dos objetos cortados. Estes problemas são essenciais no planejamento da produção em muitas indústrias, tais como indústrias de papel, vidro, móveis, metalúrgica, plástica, têxtil etc [1].

Com os avanços computacionais e também por motivos econômicos, as empresas têm se estimulado a tornar seus processos produtivos mais eficientes, o que induz, por sua vez, pesquisas acadêmicas de modelos de otimização para o controle e planejamento de sistemas produtivos.

Neste contexto tem-se o problema de corte de estoque multiperíodo que consiste, basicamente, em resolver, a cada período em um horizonte de planejamento finito, um problema de corte de estoque, para atender a uma demanda de itens nos diversos períodos do

[1]kellypoldi@ime.unicamp.br
[2]saraujo@ibilce.unesp.br

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0462

horizonte de planejamento, porém, podendo antecipar ou não a produção de itens. Isto permite que novas combinações sejam consideradas, pois determinados itens que não são demandados em um período, podem ser antecipados se suas combinações com os demais itens fazem com que a perda de material seja diminuída. O estoque de objetos (peças a serem cortadas) não utilizados em um período fica disponível no próximo, juntamente com os novos objetos adquiridos (ou fabricados) por um planejamento global que envolve outras decisões. A função objetivo a ser minimizada combina a perda de material, custos de estocar itens produzidos antecipadamente e, também, custos de estocar objetos.

O problema de corte de estoque unidimensional multiperíodo foi estudado na literatura por Poldi [9], Poldi e Arenales [10] e Poldi e Araujo [11]. Alguns trabalhos correlatos, em que o problema de corte de estoque multiperíodo aparece como subproblema, envolvem o problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque. O problema integrado tem sido bastante estudado na literatura, por exemplo em: Gramani e França [5], Poltroniere *et al.* [12], Gramani *et al.* [6, 7] e Silva *et al.* [13].

2 Modelagem Matemática

A seguir, apresentamos um modelo de otimização linear inteira de grande porte, cujo objetivo pondera as perdas nos cortes, os custos de estoque de itens e de objetos. Considere:

Índices:

$t = 1, \ldots, T$: número de períodos no horizonte de planejamento;

$k = 1, \ldots, K$: número de tipos (comprimentos) de objetos disponíveis em estoque;

$j = 1, \ldots, N_k$: número de padrões de corte para o objeto tipo k, $k = 1, \ldots, K$;

$i = 1, \ldots, m$: número de tipos de itens a serem cortados.

Dados:

$L_k \times W_k$: dimensões (comprimento e largura) do objeto tipo k, $k = 1, \ldots, K$;

e_{kt} : disponibilidade em estoque do objeto tipo k no período t, $k = 1, \ldots, K, t = 1 \ldots, T$ (e_t : vetor de dimensão K cujas componentes são e_{kt});

$\ell_i \times w_i$: dimensões (comprimento e largura) do item tipo $i, i = 1, \ldots, m$;

d_{it} : demanda o item tipo i no período t, $i = 1, \ldots, m, t = 1, \ldots, T$ (d_t: vetor de dimensão m cujas componentes são d_{it});

α_{ijkt} : número de itens do tipo i no $j-$ésimo padrão de corte para o objeto tipo k, no período t (a_{jkt}: vetor de dimensão m cujas componentes são α_{ijkt}).

Parâmetros:

c_{jkt} : custo de cortar o objeto tipo k segundo o $j-$ésimo padrão de corte do período t, $j = 1, \ldots, N_k, k = 1, \ldots, K, t = 1, \ldots, T$ (tipicamente proporcional à perda de material);

cr_{it} : custo de estocar o item tipo i no final período $t, i = 1, \ldots, m, t = 1, \ldots, T$;

cs_{kt} : custo de estocar o objeto tipo k no final período $t, k = 1, \ldots, K, t = 1, \ldots, T$.

Variáveis de decisão:

x_{jkt} : número de objetos tipo k cortados conforme o padrão de corte j, no período t;

r_{it} : número itens do tipo i que são antecipados para o período t (r_t : vetor de dimensão m cujas componentes são r_{it});

s_{kt} : número de objetos do tipo k que sobram no final do período t.

Sem perda de generalidade, consideramos os estoques iniciais nulos, $r_{i0} = 0, i = 1, \ldots, m$, e $s_{k0} = 0, k = 1, \ldots, K$. A seguir, apresentamos o modelo matemático (proposto em Poldi [9]) para o problema de corte de estoque bidimensional multiperíodo:

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar} & \sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{j=1}^{N_1} c_{j1t}x_{j1t} + \sum_{j=1}^{N_2} c_{j2t}x_{j2t} + \ldots + \sum_{j=1}^{N_K} c_{jKt}x_{jKt} + \sum_{i=1}^{m} cr_{it}r_{it} + \sum_{k=1}^{K} cs_{kt}s_{kt}\right) \\
\text{sujeito a:} & \sum_{j=1}^{N_1} a_{j1t}x_{j1t} + \sum_{j=1}^{N_2} a_{j2t}x_{j2t} + \ldots + \sum_{j=1}^{N_K} a_{jKt}x_{jKt} + r_{t-1} - r_t = d_t, t = 1, \ldots, T \\
& \sum_{j=1}^{N_k} x_{jkt} - s_{k,(t-1)} + s_{kt} = e_{kt}, k = 1, \ldots, K, t = 1, \ldots, T \\
& x_{jkt} \geq 0, \text{inteiros}, r_{it} \geq 0, s_{kt} \geq 0, j = 1, \ldots, N_k, k = 1, \ldots, K, t = 1, \ldots, T.
\end{aligned} \tag{1}
$$

A função objetivo no problema (1), a ser minimizada, consiste no custo total devido às perdas de material de todos os objetos, em todos os períodos e ao custo de estoque de itens e objetos.

A antecipação da produção de alguns itens pode aumentar custos de estoque de itens (cr_{it}) (a rigor, é uma penalidade imposta pelo gerente de produção para traduzir a inconveniência de administrar estoques de itens); mas, por outro lado, pode permitir uma melhor combinação dos itens, o que faz diminuir a perda de material. Portanto, estas variáveis r_{it} permitem ao gerente de produção analisar combinações de itens que não seriam consideradas em um modelo estático.

O primeiro conjunto de restrições e as restrições de não-negatividade das variáveis de estoque asseguram que a demanda original seja cumprida. O segundo conjunto de restrições assegura que a quantidade de objetos cortados em cada período não ultrapasse a disponibilidade. Os objetos disponíveis em um dado período t não utilizados são somados aos objetos que estarão disponíveis no próximo período, penalizando com o custo de estoque cs_{kt}. Ao considerarmos os custos de estoque todos nulos, a tendência é de que a produção de itens seja antecipada que, por sua vez, é limitada pela disponibilidade dos objetos em estoque no período, eliminando a possibilidade de toda a produção ocorrer no primeiro período do horizonte de planejamento.

O modelo (1) é de grande porte com $T(m+K)$ restrições e $TK(\sum_{k=1}^{K} N_k + 2m)$ variáveis. Em situações práticas, apresenta centenas de restrições e milhões de variáveis e a matriz de restrições é estruturada e esparsa. A relaxação linear fornece, em geral, uma boa aproximação para este problema e, neste trabalho, consideramos o problema de corte multiperíodo com a relaxação linear de (1). Embora os parâmetros na função objetivo possam ser genéricos, utilizamos neste trabalho os custos da seguinte forma:

- O parâmetro custo associado a um padrão de corte é: $c_{jkt} = \gamma(L_k W_k - \sum_{i=1}^{m} \ell_i w_i \alpha_{ijkt})$, ou seja, é a perda do $j-$ésimo padrão de corte para o objeto tipo k, no período t, multiplicado pelo custo unitário de material perdido: γ.

- O parâmetro custo de adiantar a produção de itens de um período para outro é definido por: $cr_{it} = \alpha \ell_i w_i$, em que α é o custo unitário por área de item estocado.

- O parâmetro custo de estocar objetos de um período para outro é definido por: $cs_{kt} = \beta L_k W_k$, em que β é o custo unitário por área de objeto estocado.

3 Método de Solução

Resolver o modelo (1) em geral é uma tarefa difícil devido ao grande número de variáveis (possíveis padrões de corte) e, devido ao fato que tais variáveis são inteiras. Para contornar tais dificuldades, um método de geração de colunas baseado em Gilmore e Gomory [2–4] pode ser aplicado à relaxação linear do problema. O Problema Mestre Restrito (PMR) é definido considerando um subconjunto de padrões de corte. Neste trabalho foram considerados os padrões de corte homogêneos maximais (padrões de corte com apenas um item, o máximo de vezes possível) para compor a matriz inicial do PMR. Os outros padrões de corte são desconsiderados e serão gerados no decorrer do método. Após resolver o PMR, que consiste num problema de programação linear, as variáveis duais associadas são recuperadas e um subproblema é resolvido para verificar se existem padrões de corte que podem melhorar a solução atual do PMR. Colunas atrativas são incluídas no PMR e um novo PMR é resolvido. Este processo iterativo ocorre até que não haja mais colunas que melhorem a solução do PMR.

A resolução do subproblema envolve a geração de um padrão de corte bidimensional e, neste trabalho, utilizamos a adordagem em Grafo E/OU proposta por Morabito [8]. Um grafo e/ou pode ser definido para representar todos os possíveis padrões de corte, em que os nós representam retângulos e os arcos representam cortes. Um arco (corte) estabelece uma relação entre um nó do grafo (retângulo), com dois outros nós (retângulos obtidos após o corte), portanto, um arco-E. Os padrões de corte são gerados examinando-se todas as possibilidades alternativas de corte (daí, arcos-OU). Os cortes (verticais ou horizontais) podem ser restritos, sem perda de generalidade, a um conjunto finito, chamado de *conjunto de discretização*, formado pelas combinações lineares não-negativas dos tamanhos dos itens. Um padrão de corte é definido seguindo-se uma sequência de arcos-E (cortes), a partir da raiz (placa inicial) até nos nós finais. Esta sequência é chamada de caminho completo e todo padrão de corte tem um caminho completo associado.

4 Testes Computacionais

Nesta seção apresentamos os testes computacionais realizados para o problema de corte de estoque bidimensional muliperíodo. Os resultados estão descritos a seguir.

4.1 Gerador Aleatório

Para execução dos testes computacionais para problemas de corte de estoque multi-período bidimensional, fixamos alguns parâmetros, que estão listados a seguir:

- número de períodos: $T = 2$ e 3;
- número de tipos de objetos em estoque: $K = 2$;
- número de tipos de itens demandados: $m = 5, 10, 20$ e 40;
- custo de padrões de corte: $c_{jkt} = \gamma(L_k W_k - \sum_{i=1}^{m} \ell_i w_i \alpha_{ijkt})$, com $\gamma = 1$;
- custo de estocar objetos e itens: $\alpha = \beta = 0$.

Outros parâmetros necessários para os testes foram gerados aleatoriamente nos seguintes intervalos:

- dimensões dos objetos em estoque: $L_1 \times W_1 = 140 \times 120$ e $L_2 \times W_2 = 100 \times 100$;
- dimensões dos itens demandados: $\ell_i \times w_i \in [20 \quad 80] \times [20 \quad 80]$;
- estoque do objeto tipo k, no período de tempo t: $e_{kt} = \left\lceil \left(\frac{1,1}{K}\right)\left(\frac{\sum_{i=1}^{m} \ell_i w_i d_{it}}{L_k W_k}\right) \right\rceil$;
- demanda dos itens: $d_{it} \in [1 \quad 200]$.

4.2 Resultados Computacionais

Foram definidas 8 classes de problemas bidimensionais. Para cada classe foram gerados 20 problemas-teste. Estas classes estão especificadas na Tabela 1.

Tabela 1: Caracterização das 8 classes para o problema de corte multiperíodo bidimensional.

Classe	**Número de períodos** (T)	**Número de objetos** (K)	**Número de itens** (m)
1	2	2	5
2	2	2	10
3	2	2	20
4	2	2	40
5	3	2	5
6	3	2	10
7	3	2	20
8	3	2	40

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0462

Nos resultados apresentados na Tabela 2, o valor da função objetivo apresentado, para cada classe, é a área total perdida, já que os custos (de estocagem de objetos e itens) são nulos.

Tabela 2: Valor da função objetivo (área total perdida) para o problema de corte de estoque bidimensional multiperíodo (média dos 20 exemplos em cada classe).

Classe	**Lote-por-lote**	**Multiperíodo**	**Ganho %**
1	78933, 76	66460, 59	16, 58%
2	108417, 55	87818, 02	17, 82%
3	1526827, 27	1394770, 27	10, 46%
4	5461910, 70	5295405, 56	3, 04%
5	124642, 74	114488, 10	8, 72%
6	103513, 45	87105, 25	17, 75%
7	2458400, 27	2259759, 71	10, 45%
8	8351067, 21	8047756, 42	3, 63%
Media	2276741, 19	2169195, 49	10, 93%

Na Tabela 2 observamos que a proibição de estoque entre períodos (solução lote-por-lote) faz crescer a perda, em média, cerca de 10%. O comportamento do modelo para custos de estoque não nulos é análogo (mais detalhes [9]). Com isto, o gerente de produção tem uma ferramenta que o auxilia na avaliação do ganho obtido com a antecipação da produção de alguns itens.

5 Conclusões

Problemas de corte de estoque em geral vêm sendo tratados na literatura como problemas com único período, enquanto na prática, no ambiente industrial, vários períodos são considerados. Neste trabalho, um problema de corte bidimensional em que a demanda e a aquisição de objetos ocorrem em um horizonte de planejamento foi considerado, tal problema foi chamado de problema de corte de estoque multiperíodo bidimensional.

Uma extensão natural do método simplex com geração de colunas para tratar esse problema de grande porte foi implementada. Foram realizados experimentos computacionais, com problemas de corte de estoque multiperíodo bidimensional gerados aleatoriamente. Tais experimentos mostram que ganhos efetivos podem ser obtidos usando-se o modelo de corte de estoque multiperíodo, quando comparado com a solução lote-por-lote, tipicamente utilizada na prática.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio do CNPq e da FAPESP (2014/01203-5).

Referências

[1] H. Dyckhoff, H. J. Kruse, D. Abel and T. Gau, Trim loss and related problems. *The International Journal of Management Science*, 13(1):59-72.

[2] P. C. Gilmore and R. E. Gomory, A linear programming approach to the cutting stock problem. *Operations Research*, 9:848-859, 1961.

[3] P. C. Gilmore and R. E. Gomory, A linear programming approach to the cutting stock problem - Part II. *Operations Research*, 11:863-888, 1963.

[4] P. C. Gilmore and R. E. Gomory, Multi-stage cutting stock problems of two and more dimensions. *Operations Research*, 13:94-120, 1965.

[5] M. C. N. Gramani and P. M. França, The combined cutting stock and lot sizing problem in industrial process. *European Journal of Operational Research*, 74:509-521, 2006.

[6] M. C. N. Gramani, P. M. França and M. N. Arenales, A Lagrangian relaxation approach to a coupled lot-sizing and cutting stock problem. *International Journal of Production Economics*, 119:219-227, 2009.

[7] M. C. N. Gramani, P. M. França and M. N. Arenales, A linear optimization approach to the combined production planning model. *Journal of the Franklin Institute*, 348:1523-1536, 2011.

[8] R. Morabito, Uma Abordagem em Grafo-e-ou para o Problema de Empacotamento: Aplicação ao Carregamento de Paletes e Contêineres. Tese de Doutorado, EESC-USP, 1992.

[9] K. C. Poldi, O Problema de Corte de Estoque Multiperíodo. Tese de Doutorado, ICMC-USP, 2007.

[10] K. C. Poldi and M. N. Arenales, O problema de corte de estoque unidimensional multiperíodo. *Pesquisa Operacional*, 30:153-174, 2010.

[11] K. C. Poldi and S. A. Araujo, Mathematical models and a heuristic method for the multiperiod one-dimensional cutting stock problem. *Annals of Operations Research*, 2016. DOI 10.1007/s10479-015-2103-2.

[12] S. C. Poltroniere, K. C. Poldi, F. M. B. Toledo and M. N. Arenales, A coupling cutting stock-lot sizing problem in the paper industry. *Annals of Operations Research*, 157:91-104, 2008.

[13] E. Silva, F. Alvelos and J. M. Valério de Carvalho, Integrating two-dimensional cutting stock and lot sizing problems. *Journal of the Operational Research Society*, 65:108-123, 2014.

