Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Condições Necessárias para Problemas de Otimização com Tempo Contínuo sob Regularidade tipo Mangasarian-Fromovitz

Moisés Rodrigues Cirilo do Monte[1]
Doutorando em Matemática, UNESP – Univ. Estadual Paulista, C.S.J.Rio Preto - SP
Valeriano Antunes de Oliveira[2]
Departamento de Matemática Aplicada, UNESP – Univ. Estadual Paulista, C.S.J. Rio Preto - SP

Resumo. Condições necessárias de otimalidade de primeira ordem, do tipo Karush-Kuhn-Tucker, são obtidas para problemas de programação não-linear com tempo contínuo, sob uma qualificação de restrição tipo Mangasarian-Fromovitz uniforme.

Palavras-chave. Otimização com Tempo Contínuo, Qualificação de Restrições, Mangasarian-Fromovitz.

1 Introdução

O problema de programação não-linear com tempo contínuo na formulação abaixo foi estudado em Zalmai [6]:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \phi(x) = \displaystyle\int_0^T f(t, x(t))dt \\ \text{sujeito a} & g(t, x(t)) \leq 0 \text{ q.t.p. em } [0, T], \\ & x \in X, \end{array} \tag{PTC}$$

onde $X \neq \emptyset$ é um subconjunto convexo do espaço de Banach $L^n_\infty[0, T]$ que denota o conjunto das funções vetoriais n dimensionais mensuráveis e essencialmente limitadas, definidas no compacto $[0, T] \subset \mathbb{R}$, com norma definida por

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} \operatorname{ess\,sup}\{|x_j(t)| : t \in [0, T]\},$$

onde para cada $t \in [0, T]$, $x_j(t)$ é a j-ésima componente de $x(t) \in \mathbb{R}^n$. $\phi : X \to \mathbb{R}$, $f(t, x(t)) = \xi(x)(t)$ e $g(t, x(t)) = \gamma(x)(t)$, com $\xi : X \to \Lambda^1_1[0, T]$ e $\gamma : X \to \Lambda^m_1[0, T]$, onde $\Lambda^m_1[0, T]$ denota o conjunto das funções vetoriais m dimensionais mensuráveis e essencialmente limitadas, definidas no compacto $[0, T] \subset \mathbb{R}$, com norma

$$\|y\|_1 = \max_{1\leq j\leq m} \int_0^T |y_j(t)|dt.$$

[1]moises@pontal.ufu.br
[2]antunes@ibilce.unesp.br

A integral na função objetivo e todas as integrais neste trabalho são no sentido de Lebesgue.

O problema de otimização com tempo contínuo foi inicialmente proposto por Bellman [1, 2] em suas investigações, em programação linear com tempo contínuo, de alguns modelos dinâmicos de produção e inventário chamados "Problema de Gargalo". Uma das aplicações apresentadas nos trabalhos de Bellman é o de determinar a política de alocação que maximiza a quantidade de aço no estoque de uma indústria, ao final de um certo período.

Problemas de programação com tempo contínuo podem ser tomados como modelos realistas para uma vários processos de decisão ótima em diversas áreas da Ciência, tais como economia, pesquisa operacional e engenharia. Algumas aplicações do problema (PTC) em Controle Ótimo podem ser encontradas em Zalmai [6, 7].

O Problema (PTC) em questão foi proposto por Zalmai em [6], onde o autor obtém condições de otimalidade para o problema usando uma função perturbadora e definindo o conceito de problema estável. Assumindo algumas hipóteses de convexidade sobre o problema, demonstra-se um teorema Karush-Kuhn-Tucker ponto de sela, baseado na definição de estabilidade do Problema (PTC). Além disso, teoremas de dualidade Lagrangeana são obtidos.

Em Zalmai [8], ideias geométricas de Girsanov [3] e o Teorema de Transposição de Gordan Generalizado [5] são usados para obter um teorema de condições necessária tipo Fritz John para o Problema (PTC). Neste mesmo trabalho, Zalmai prova um Teorema de condições de otimalidade Kuhn-Tucker impondo uma qualificação de restrição chamada Karlin [4], que é equivalente à condição de Slater (por intermédio do Teorema de Transposição de Gordan [5]).

Neste trabalho, propomos o uso de uma qualificação de restrição tipo Mangasarian-Fromovitz uniforme (MFCQ), que possibilita lidar com uma quantidade maior de problemas, dado que a condição de Slater implica MFCQ. A recíproca desse fato não é verdadeira, como veremos mais adiante.

2 Preliminares

Nesta seção são apresentados algumas definições e resultados básicos.

Definição 2.1. *Seja V um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$ que contém o conjunto $\{x(t) \in \mathbb{R}^n \mid x \in X,\ t \in [0,T]\}$. Assim, f e g_i (a i-ésima componente de g), $i = 1, 2, ..., m$, são funções reais definidas em $[0,T] \times V$. Seja F o conjunto de todas as soluções viáveis para o problema (PTC) (que supomos não vazio), isto é,*

$$F = \{x \in X \mid g(t, x(t)) \leq 0 \ q.t.p. \ em \ [0,T]\}.$$

Definição 2.2. *Dados $\bar{x} \in F$ e $t \in [0,T]$, defina $I_a(t)$ o conjunto de índices das restrições ativas em $(t, \bar{x}(t))$, isto é,*

$$I_a(t) = \{i \in \{1, 2, ..., m\} \mid g_i(t, \bar{x}(t)) = 0\},$$

e seja o seu complementar

$$I_c(t) = \{i \in \{1, 2, ..., m\} \mid g_i(t, \bar{x}(t)) < 0\}$$

o conjunto de índices de restrições inativas.

Definição 2.3. *Para $i \in \{1,2,...,m\}$, defina funções $\delta_i : [0,T] \to \mathbb{R}$ como*

$$\delta_i(t) = \begin{cases} 1, & se\ i \in I_a(t), \\ 0, & se\ i \in I_c(t). \end{cases}$$

Definição 2.4. *Dizemos que $\bar{x} \in F$ é uma solução ótima local para o problema (PTC) se existe $\epsilon > 0$ tal que $\phi(\bar{x}) \leq \phi(x)$ para todo $x \in F$ que satisfaça $\|x - \bar{x}\|_\infty \leq \epsilon$.*

Definição 2.5 (Condição de Slater)**.** *Seja X um conjunto convexo em $L^n_\infty[0,T]$ e seja g uma função convexa em seu segundo argumento em V ao longo de $[0,T]$. Dizemos que g satisfaz a qualificação de restrição de Slater (em X) se existe $\hat{x} \in X$ tal que $g(t, \hat{x}(t)) < 0$ q.t.p. em $[0,T]$.*

Vamos enunciar os dois principais resultados auxiliares que utilizaremos na sequência. O primeiro é o Teorema de Gordan Generalizado [5].

Teorema 2.1. *Seja X um subconjunto convexo e não vazio em $L^n_\infty[0,T]$, seja $p : [0,T] \times V \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação dada por $p(t,x(t)) = \pi(x)(t)$, onde π é uma aplicação de X em $\Lambda^m_1[0,T]$. Suponhamos que p é convexa com respeito a seu segundo argumento em V ao longo de $[0,T]$. Então, ou*

$$p(t, x(t)) < 0 \text{ q.t.p. em } [0,T]$$

tem uma solução $x \in X$, ou

$$\int_0^T u(t) \cdot p(t, x(t)) dt \geq 0$$

para todo $x \in X$ e para algum $u \in L^m_\infty[0,T] \setminus \{0\}$, $u(t) \geq 0$ q.t.p. em $[0,T]$, mas nunca os dois simultaneamente.

O Teorema a seguir é equivalente ao Teorema de Condições Necessárias tipo Fritz John dado em Zalmai [8]. Aqui, estamos supondo que as restrições são continuamente diferenciáveis e que o conjunto de índices de restrições ativas é $I_a(t)$, como definido anteriormente. Em [8], o autor trabalha com outro conjunto de índices.

Teorema 2.2 (Fritz John)**.** *Seja $\bar{x} \in F$. Suponha que f e g_i, $i \in \{1,2,...,m\}$ são continuamente diferenciáveis no segundo argumento em $\bar{x}(t)$ ao longo de $[0,T]$ e que as funções $t \mapsto \nabla f(t, \bar{x}(t))$ e $t \mapsto \nabla g_i(t, \bar{x}(t)) \cdot h(t) \equiv \langle D\gamma_i(\bar{x}), h\rangle(t)$, $i \in \{1,2,...,m\}$, são Lebesgue integráveis em $[0,T]$ para toda $h \in L^n_\infty[0,T]$. Se $\bar{x}$ é uma solução ótima local do Problema (PTC), então existem $\bar{u}_0 \in \mathbb{R}$, $\bar{u}_i \in L_\infty[0,T]$, $i = 1,2,\ldots,m$, tais que*

$$\int_0^T [\bar{u}_0 \nabla f(t, \bar{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \bar{u}_i(t) \nabla g_i(t, \bar{x}(t))] \cdot h(t) dt = 0 \ \forall\ h \in L^n_\infty[0,T], \tag{1}$$

$$\bar{u}_i(t) g_i(t, \bar{x}(t)) = 0 \text{ q.t.p. em } [0,T],\ i = 1,2,\ldots,m, \tag{2}$$

$$\bar{u}_0 \geq 0,\ \bar{u}_i(t) \geq 0 \text{ q.t.p. em } [0,T],\ i = 1,2,\ldots,m, \tag{3}$$

$$(\bar{u}_0, \bar{u}_1(t), \bar{u}_2(t), \ldots, \bar{u}_m(t)) \neq 0 \text{ q.t.p. em } [0,T]. \tag{4}$$

A demonstração do resultado acima é uma simples adaptação da demonstração apresentada em [8], e será omitida.

3 Resultado Principal

Enunciaremos, agora, a qualificação de restrições tipo Mangasarian-Fromovitz para problemas de otimização com tempo contínuo.

Definição 3.1. *As restrições do Problema (PTC) satisfazem a qualificação de restrição tipo Mangasarian-Fromovitz (MFCQ) em $\bar{x} \in X$ quando existe $\bar{h} \in L^n_\infty[0,T]$ tal que, para quase todo $t \in [0,T]$, temos*

$$\nabla g_i(t, \bar{x}(t)) \cdot \bar{h}(t) < 0, \ \ i \in I_a(t).$$

Proposição 3.1. *Seja $\bar{x} \in X$. Suponha que g_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, são continuamente diferenciáveis no segundo argumento ao longo de $[0,T]$ e que satisfazem a condição de Slater. Então g_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, satisfazem MFCQ em $\bar{x}$.*

Demonstração. Suponha que g_i, $i = 1, 2, ..., m$, satisfazem a condição de Slater. Então existe um $\hat{x} \in X$ tal que, para quase todo $t \in [0,T]$, $g_i(t, \hat{x}(t)) < 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Usando a convexidade de g_i em V, para quase todo $t \in [0,T]$, temos que

$$\begin{aligned} 0 > g_i(t, \hat{x}(t)) \ \ &\geq \ \ g_i(t, \bar{x}(t)) + \nabla g_i(t, \bar{x}(t)) \cdot [\hat{x}(t) - \bar{x}(t)] \\ &= \ \ \nabla g_i(t, \bar{x}(t)) \cdot [\hat{x}(t) - \bar{x}(t)], \ \ i \in I_a(t). \end{aligned}$$

Escolhendo $\bar{h} = \hat{x} - \bar{x}$, temos que g_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, satisfazem MFCQ em $\bar{x}$. □

A recíproca não acontece, como ilustra o exemplo a seguir.

Exemplo 3.1. *Considere o problema de otimização com tempo contínuo com $m = n = 1$:*

$$\begin{aligned} &\textit{Minimizar} \quad \phi(x) = \int_0^1 x(t)^2 dt \\ &\textit{sujeito a} \quad\ \ g(t, x(t)) = \frac{1}{3}x^3(t) - x(t) \leq 0 \ \ q.t.p. \ \ em \ [0,1], \\ &\qquad\qquad\qquad x \in L^1_\infty[0,1]. \end{aligned} \tag{5}$$

Note que $\bar{x} \equiv 0$ é solução para o Problema (5) e que a restrição do problema satisfaz MFCQ: $\nabla g(t, \bar{x}(t)) \cdot h(t) = -h(t)$, $t \in [0,1]$, $h \in L^1_\infty[0,1]$. Basta tomar $h \equiv 1$. Mas, g não satisfaz a condição de Slater pois não é convexa em x (basta tomar $x_1 = -1, x_2 = 0$ e $\lambda = 1/2$).

Teorema 3.1 (Karush-Kuhn-Tucker)**.** *Seja $\bar{x} \in F$. Suponha que f e g_i, $i \in \{1, 2, ..., m\}$, são continuamente diferenciáveis no segundo argumento ao longo de $[0,T]$, e que as funções $t \mapsto \nabla f(t, \bar{x}(t))$ e $t \mapsto \nabla g_i(t, \bar{x}(t)) \cdot h(t) \equiv \langle D\gamma_i(\bar{x}), h\rangle(t)$, $i \in \{1, 2, ..., m\}$, são Lebesgue integráveis em $[0,T]$ para toda $h \in L^n_\infty[0,T]$. Suponha que as restrições do Problema (PTC) satisfazem MFCQ em $\bar{x}$. Se $\bar{x}$ é uma solução ótima local de (PTC), então existem $\tilde{u}_i \in L_\infty[0,T]$, $i \in \{1, 2, ..., m\}$, tais que*

$$\int_0^T [\nabla f(t, \bar{x}(t)) + \sum_{i=1}^m \tilde{u}_i(t) \nabla g_i(t, \bar{x}(t))] \cdot h(t) dt = 0 \ \forall \ h \in L^n_\infty[0,T], \tag{6}$$

$$\tilde{u}_i(t) g_i(t, \bar{x}(t)) = 0 \ \ q.t.p. \ \ em \ [0,T], \ \ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{7}$$

$$\tilde{u}_i(t) \geq 0 \ \ q.t.p. \ \ em \ [0,T], \ \ i = 1, 2, \ldots, m. \tag{8}$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.2, existem $\bar{u}_0 \in \mathbb{R}$, $\bar{u}_i \in L_\infty[0,T]$, $i = 1, 2, \ldots, m$, tais que (1)-(4) acontecem. Se $\bar{u}_0 = 0$, usando (2) e a definição de $\delta_i(t)$, (1) pode ser reescrita como

$$\int_0^T \sum_{i=1}^m \bar{u}_i(t)\delta_i(t)\nabla g_i(t, \bar{x}(t)) \cdot h(t)dt = 0 \; \forall \; h \in L_\infty^n[0,T]. \tag{9}$$

Definindo $p_i : [0,T] \times V \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, por

$$p_i(t, h(t)) = \delta_i(t)\nabla g_i(t, \bar{x}(t)) \cdot h(t),$$

note que p_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, é convexa com respeito ao seu segundo argumento em $\mathbb{R}^n$ ao longo de $[0,T]$. Escrevendo $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, por (3), (4) e (9), pode-se afirmar que existe um $\bar{u} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m) \in L_\infty^m[0,T] \setminus \{0\}$, $\bar{u}(t) \geq 0$ q.t.p. em $[0,T]$, tal que

$$\int_0^T u(t) \cdot p(t, h(t))dt = 0 \; \forall \; h \in L_\infty^n[0,T].$$

Mas, pelo Teorema 2.1, isto equivale a dizer que não existe $h \in L_\infty^n[0,T]$ tal que

$$p(t, h(t)) < 0 \text{ q.t.p. em } [0,T],$$

isto é,

$$p_i(t, h(t)) < 0 \Leftrightarrow \delta_i(t)\nabla g_i(t, \bar{x}(t)) \cdot h(t) < 0 \text{ q.t.p. em } [0,T], \; i = 1, 2, \ldots, m,$$

o que equivale a dizer que não existe $h \in L_\infty^n[0,T]$ tal que, para quase todo $t \in [0,T]$,

$$\nabla g_i(t, \bar{x}(t)) \cdot h(t) < 0, \; i \in I_a(t).$$

Isto contradiz o fato das restrições de (PTC) satisfazerem MFCQ em $\bar{x}$. Logo, $\bar{u}_0 \neq 0$. Tomando $\tilde{u}_i(t) = \bar{u}_i(t)/\bar{u}_0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, segue que (6)-(8) valem. $\square$

4 Conclusão

Neste trabalho, apresentamos uma nova qualificação de restrições tipo Mangasarian-Fromovitz (MFCQ) para obtenção de condições necessárias de primeira ordem para problemas de programação não-linear com tempo contínuo.

Para este fim, usamos as condições necessárias do tipo Fritz John e um Teorema de Alternativa no contexto de tempo contínuo, encontrados na literatura. Apresentamos um exemplo que mostra que, assim como em programação matemática em dimensão finita, há uma maior abrangência de MFCQ sobre a condição de Slater.

Pretendemos continuar esses estudo também para problemas com restrições de igualdade incluídas ao problema e desenvolver o uso de outras qualificações de restrições da programação não-linear em dimensão finita, estendendo-as para problemas de programação com tempo contínuo.

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0467

Agradecimentos

A Deus, meu orientador prof. Dr. Valeriano Antunes de Oliveira, minha família que está comigo a cada momento, ao Ibilce-UNESP e a UFU.

V. A. de Oliveira foi parcialmente apoiado pelos processos de números 2013/07375-0, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), 457785/2014-4 e 310955/2015-7, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Referências

[1] R. Bellman, Bottleneck problems and dynamic programming, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 39:947–951, 1953.

[2] R. Bellman, *Dynamic Programming*. Princeton Univ. Press, Princeton, 1957.

[3] I. V. Girsanov, *Lectures on Mathematical Theory of Extremum Problems*, vol. 67. Springer-Verlag, New York, 1972.

[4] O. L. Mangasarian, *Nonlinear Programming*. SIAM Classics in Applied Mathematics, vol. 10, Philadelphia, 1993.

[5] G. J. Zalmai, A continuous-time generalization of Gordan's transposition theorem, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 110:130–140, 1985.

[6] G. J. Zalmai, Optimality conditions and lagrangian duality in continuous-time nonlinear programming, *Journal of mathematical analysis and applications*, 109:426–452, 1985.

[7] G. J. Zalmai, Sufficient optimality conditions in continuous-time nonlinear programming, *Journal of mathematical analysis and applications*, 111:130–147, 1985.

[8] G. J. Zalmai, The Fritz John and Kuhn-Tucker optimality conditions in continuous time nonlinear programming, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 110:503–518, 1985.

