

Programação Linear Fuzzy: Otimização de um Modelo de Circuito Elétrico

Ana Maria A. Bertone¹
Rosana S. da Motta Jafelice²
Marcos Antônio da Câmara³
Faculdade de Matemática, FAMAT, UFU

Resumo. Um problema de divisão de tensão de um circuito elétrico é modelado com o objetivo de determinar os valores centrados das resistências, de maneira que a impedância resistiva do divisor de tensão seja mínima. Este problema é equivalente a maximizar as admitâncias, que são definidas como a razão entre a corrente elétrica e sua voltagem, medida em siemens, associadas às resistências. Três casos são analisados, considerando os componentes de programação linear reais, números fuzzy do tipo 1 ou conjunto fuzzy do tipo 2. O primeiro é considerado para a validação dos outros casos. A solução ótima na programação linear fuzzy do tipo 1 é obtida através de duas relações de ordem definidas em dois sub-espacos dos números fuzzy trapezoidais, o que permite resolver o correspondente problema de programação linear com componentes reais. O teorema de representação dos α -níveis é o método para obter a solução ótima do tipo 2. Para cada α -nível é resolvido um problema de programação linear fuzzy do tipo 1 utilizando a metodologia anterior. Simulações numéricas ilustram a metodologia proposta para um caso particular.

Palavras-chave. Programação linear fuzzy, Números fuzzy do tipo 1, Conjuntos fuzzy do tipo 2, Circuito Elétrico.

1 Introdução

Para representar um circuito elétrico tem que se levar em conta que suas componentes estão caracterizadas por diversos parâmetros, cada um dos quais tem associada uma certa tolerância dada pelo fabricante do produto. Por exemplo, uma resistência de 48 ohms pode ter uma tolerância $\epsilon = \pm 10\%$, devido à temperatura, tempo de uso, entre outras razões [1]. Esta gradualidade nos motivou a utilização do enfoque de programação linear fuzzy no problema. O valor dado pelo fabricante do aparelho elétrico é denominado de “valor centrado”. Tanto as tolerâncias como os valores centrados permitem controlar melhor os limites sob os quais o circuito se mantém operativo e dessa maneira otimizar seu rendimento. Um especialista em eletrônica poderia aproveitar as informações obtidas, pois a abordagem de conjuntos fuzzy do tipo 1, estende a gradualidade do caso clássico do

¹anamaria@famat.ufu.br

²rmotta@ufu.br

³camara@ufu.br

problema, impondo graus de pertinência além dos números considerados pelo fabricante. O enfoque do ponto de vista dos conjuntos fuzzy do tipo 2, estende ainda mais a qualidade da gradualidade das tolerâncias, no sentido de acrescentar um adjetivo à linguística do problema. Por exemplo, quando o fabricante do aparelho recomenda 40% de tolerância, consideramos valores exatos entre 0 e 40 para caso clássico. Para os conjuntos fuzzy tipo 1, acrescentamos o adjetivo “em torno de 40%” e para os conjuntos fuzzy do tipo 2 expressamos “mais ou menos em torno de 40%”. A Programação Linear (PL) fuzzy permite trabalhar com dados graduais, levando a explicar o modelo matemático de uma forma mais realística [2].

2 O Modelo Matemático

O divisor de tensão apresentado em [1] e ilustrado na Figura 1(a) é o modelo estudado nesta seção.

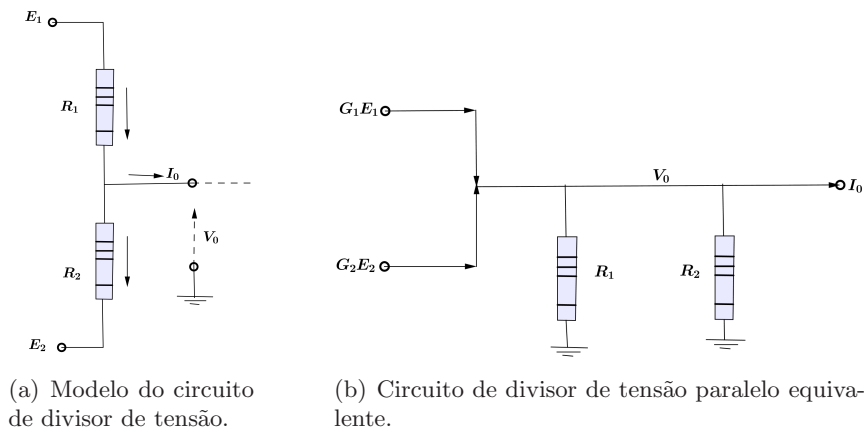


Figura 1: Circuitos básicos de divisão de tensão equivalentes.

Nesse circuito são considerados dois geradores de tensão, cada um produzindo uma força eletromotriz de E_1 e E_2 volts, respectivamente. Vamos supor como hipótese que $E_1 > E_2$ para que o circuito, representado na Figura 1(a), tenha a corrente no sentido indicado pelas flechas. Também estamos supondo como conhecidas as tolerâncias associadas aos respectivos potenciais. Ou seja, temos como valor mínimo E_1^- e máximo E_1^+ de E_1 , e analogamente, para E_2 . O objetivo desse modelo é determinar os valores centrados das resistências R_1 e R_2 de maneira que a impedância resistiva do divisor de tensão seja mínima. Além disso, como restrições esperamos que o potencial de saída V_0 se mantenha dentro de um intervalo predeterminado $[V_0^m, V_0^M]$, onde $m = \min$ e $M = \max$, quando a corrente I_0 que se deseja tirar do divisor, ao conectar algum componente adicional, está no intervalo $[I_0^m, I_0^M]$. As tolerâncias que terão as resistências são conhecidas e temos que

$$E_1^- \geq V_0^M \geq V_0^m \geq E_2^+. \quad (1)$$

A impedância resistiva total do divisor de tensão vem dada pela fórmula $R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, porque as duas resistências estão em paralelo. Com o objetivo de obter um modelo linear

nas variáveis resistências, substituíremos pelas admitâncias associadas, que são dadas pelos valores inversos $G_i = \frac{1}{R_i}$, $i = 0, 1, 2$. Com esta notação a admitância total do divisor é $G_0 = G_1 + G_2$. Como consequência, a função objetivo do problema é $G_0^- = G_1^- + G_2^-$, a qual iremos maximizar. Denotando por \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 os valores centrados das admitâncias G_1 e G_2 , respectivamente, então $G_1^- = (1 - \epsilon_1)\mathcal{G}_1$ e $G_2^- = (1 - \epsilon_2)\mathcal{G}_2$, sendo ϵ_1 e ϵ_2 duas tolerâncias conhecidas. Assim, o problema de programação linear proposto é

$$\text{Max}(H(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)), \text{ em que } H(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) = (1 - \epsilon_1)\mathcal{G}_1 + (1 - \epsilon_2)\mathcal{G}_2. \quad (2)$$

Para expressar as restrições sobre as variáveis \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 , vamos utilizar a fórmula que relaciona as variáveis em estudo [1]

$$V_0 = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2 - I_0}{G_1 + G_2}. \quad (3)$$

A expressão (3) pode ser deduzida observando a Figura 1(b), onde se representa o mesmo circuito com fontes de corrente no lugar de voltagem. Note que, derivando parcialmente a equação (3) com respeito a G_1 , temos que $\frac{\partial V_0}{\partial G_1} = \frac{(E_1 - E_2)G_2 + I_0}{(G_1 + G_2)^2}$ é positiva levando em conta o fato que $E_1 > E_2$. Da mesma forma, obtemos que $\frac{\partial V_0}{\partial G_2} < 0$ e $\frac{\partial V_0}{\partial I_0} < 0$. Consequentemente, a restrição $V_0 \geq V_0^m$ é equivalente à condição

$$\frac{E_1^- G_1^- + E_2^- G_2^+ - I_0}{(G_1^- + G_2^+)^2} \geq V_0^m,$$

ou, equivalentemente,

$$(1 - \epsilon_1)(E_1^- - V_0^m)\mathcal{G}_1 + (1 + \epsilon_2)(E_2^- - V_0^m)\mathcal{G}_2 \geq I_0^M \quad (4)$$

Analogamente, a restrição $V_0 \leq V_0^M$ é equivalente à condição

$$(1 + \epsilon_1)(E_1^+ - V_0^M)\mathcal{G}_1 + (1 - \epsilon_2)(E_2^+ - V_0^M)\mathcal{G}_2 \leq I_0^m. \quad (5)$$

Finalmente, reunindo as expressões (2), (4) e (5), e sabendo que todas as grandezas são não negativas, obtemos o modelo matemático de programação linear para o problema do divisor de tensão da Figura 1.

3 Conjuntos Fuzzy do tipo 1 e tipo 2

Faremos uma resenha dos conceitos básicos de números fuzzy do tipo 1 e conjuntos fuzzy do tipo 2, cujos detalhes podem ser encontrados em [3, 4].

Dado um conjunto X universo definimos como conjunto A fuzzy do tipo 1 pela sua função de pertinência $\mu_A(x) \in [0, 1]$. O conjunto de todos os conjuntos fuzzy do tipo 1 denotamos por $F(X)$. O α -nível do conjunto fuzzy do tipo 1, A , é o conjunto definido por $\{x \in X, \mu_A(x) \geq \alpha\}$, $0 < \alpha \leq 1$; e o nível zero é o fecho topológico do conjunto $\text{supp}(A) = \{x \in X, \mu_A(x) > 0\}$, que é por definição o suporte de A . O conjunto fuzzy do tipo 1, A , é chamado de *número fuzzy* quando $X = \mathbb{R}$, existe $x \in X$ tal que $\mu_A(x) = 1$, todos os α -níveis de A são intervalos não vazios fechados e suporte de A limitado. Vamos usar neste trabalho dois tipos de números fuzzy:

- *singleton*, que é a interpretação de um número real r como número fuzzy, considerando como função de pertinência $\mu_r(x) = 1$ se $x = r$ e $\mu_r(x) = 0$ se $x \neq r$. Denotamos este número fuzzy por \bar{r} ;
- o número fuzzy trapezoidal definido pela função de pertinência $\mu_A(x) = \frac{x-a}{m-a}$ se $x \in [a, m]$ ou $\mu_A(x) = 1$ se $x \in [m, n]$ ou $\mu_A(x) = \frac{b-x}{b-n}$ se $x \in [n, b]$ ou zero nos outros casos, é denotado por $A = (a, m, n, b)$. Chamamos o intervalo $[m, n]$ de núcleo de A . Dizemos que um número fuzzy trapezoidal A é *degenerado* se é da forma $A = (a, a, a, b)$ ou $A = (a, b, b, b)$.

Um conjunto fuzzy do tipo 2, \tilde{A} , em X é definido pela sua função de pertinência $\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow F([0, 1])$, ou seja, para cada $x \in X$ temos $\mu_{\tilde{A}}(x) = \tilde{A}_x$ um conjunto fuzzy do tipo 1 cujo suporte é o intervalo $[0, 1]$. Se $u_x \in \text{supp}(\tilde{A}_x)$ este número é chamado da pertinência primária de x . O grau de pertinência u_x no conjunto \tilde{A}_x é chamado de pertinência secundária de x . A união das pertinências primárias é chamada de “pegada de incerteza” traduzida do inglês “footprint of uncertainty” (FOU). Um conjunto fuzzy do tipo 1, A , pode ser interpretado como um conjunto fuzzy do tipo 2, considerando como função de pertinência secundária $\mu_A(x, u_x) = 1$ se $u_x \in A$ e $\mu_A(x, u_x) = 0$ se $u_x \notin A$, denominado de “singleton” do tipo 2.

Definimos as operações lineares entre números fuzzy trapezoidais. De fato, seja $A_i = (a_i, m_i, n_i, b_i)$, $i = 1, 2$, dois números fuzzy trapezoidais. Por definição temos que

1. $A_1 + A_2 = (a_1 + a_2, m_1 + m_2, n_1 + n_2, b_1 + b_2)$;
2. Se $\alpha \in \mathbb{R}^+$ então $\alpha \cdot A_1 = \alpha \cdot (a_1, m_1, n_1, b_1) = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot m_1, \alpha \cdot n_1, \alpha \cdot b_1)$;
Se $\alpha \in \mathbb{R}^-$ então $\alpha \cdot A_1 = \alpha \cdot (a_1, m_1, n_1, b_1) = (\alpha \cdot b_1, \alpha \cdot n_1, \alpha \cdot m_1, \alpha \cdot a_1)$.

Com essas operações o conjunto dos números fuzzy trapezoidais é um subespaço vetorial de $F(\mathbb{R})$, que denominaremos de $Trap(\mathbb{R})$.

Diversas propostas sobre relação de ordem no conjunto dos números fuzzy do tipo 1 são encontradas na literatura [5–7]. Uma relação de ordem no espaço vetorial $Trap(\mathbb{R})$, é definida da seguinte maneira: sejam $A, B \in Trap(\mathbb{R})$ então $A < B$ se e somente se $g(A) < g(B)$, em que g é uma defuzzificação definida sobre $Trap(\mathbb{R})$. Uma defuzzificação é uma função cujo domínio é um subespaço vetorial dos números fuzzy sobre o conjunto dos números reais. Neste trabalho são consideradas duas relações de ordem e, para defini-las, consideramos dois subespaços vetoriais de $Trap(\mathbb{R})$:

$$Trap_D(\mathbb{R}) = \{(a, a, n, b), a, n, b \in \mathbb{R}\} \text{ e } Trap_E(\mathbb{R}) = \{(a, m, b, b), a, m, b \in \mathbb{R}\}.$$

No subespaço $Trap_D(\mathbb{R})$ a defuzzificação definida é a função $g_{\alpha_D}(A) = b + \alpha_D(n - b)$ e, similarmente, no subespaço $Trap_E(\mathbb{R})$ é definida a ordem $g_{\alpha_E} = a + \alpha_E(m - a)$, em que α_D e α_E são números fixados no intervalo $[0, 1]$.

4 Métodos de Programação Linear Fuzzy

Nesta seção consideramos o problema de programação linear descrito na seção 2, que é dado pela expressão (2) e a restrição

$$\begin{pmatrix} (1 - \epsilon_1)(E_1^- - V_0^m) & (1 + \epsilon_2)(E_2^- - V_0^m) \\ (1 + \epsilon_1)(V_0^M - E_1^+) & (1 - \epsilon_2)(V_0^M - E_2^+) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{G}_1 \\ \mathcal{G}_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} I_0^M \\ -I_0^m \end{pmatrix}.$$

Denotamos a matriz 2×2 da restrição por Θ e o vetor independente à direita da desigualdade por Υ . Consideramos os elementos dos componentes do problema de programação linear que são H , definido em (2), Θ e Υ em três casos:

1. números reais (programação clássica). Com o objetivo de validar os métodos propostos;
2. números fuzzy (programação linear fuzzy do tipo 1). Os coeficientes de H e as entradas da primeira linha de Θ são elementos de $Trap_E(\mathbb{R})$ e as entradas da segunda linha de Θ são elementos de $Trap_D(\mathbb{R})$. O vetor $\Upsilon = (\overline{I_0^m}, \overline{I_0^M})$, em que $I_0^m, I_0^M \in \mathbb{R}$;
3. conjuntos fuzzy do tipo 2 (programação linear fuzzy do tipo 2). Os coeficientes de H e as entradas da primeira linha de Θ são conjuntos fuzzy singleton do tipo 2, cuja projeção no plano (x, u_x) pertence a $Trap_E(\mathbb{R})$ e as entradas da segunda linha de Θ são conjuntos fuzzy singleton do tipo 2, cuja projeção no plano (x, u_x) pertence a $Trap_D(\mathbb{R})$. A primeira componente do vetor Υ é um conjunto fuzzy do tipo 2 definido pela função de pertinência $\mu_{\widetilde{I_0^M}}(x, u_x) = \alpha$ se $x \in [I_0^M, I_0^M + \gamma_D]$ e $u_x = \frac{I_0^M + \gamma_D(1 - \alpha) - x}{\gamma_D(1 - \alpha)}$ para $\alpha \in [0, 1]$, em que $I_0^M + \gamma_D$ é o máximo do nível zero. A segunda componente do vetor Υ é um conjunto fuzzy do tipo 2 definido pela função de pertinência $\mu_{\widetilde{I_0^m}}(x, u_x) = \alpha$ se $x \in [I_0^m - \gamma_E, I_0^m]$ e $u_x = \frac{x - I_0^m + \gamma_E(1 - \alpha)}{\gamma_E(1 - \alpha)}$ para $\alpha \in [0, 1]$, em que $I_0^m - \gamma_E$ é o mínimo do nível zero.

O método de resolução aplicado no caso de programação clássica é o do ponto interior [8] utilizando o algoritmo de programação linear `linprog` do Matlab. No caso 2 são aplicadas as ordens de defuzzificação g_{α_D} e g_{α_E} nos números fuzzy envolvidos na função objetivo e nas restrições para, em seguida, calcular o ponto ótimo através do método do caso 1. No caso 3 é definida a família parametrizada por α de problemas PL do tipo 1, obtidas através do corte da superfície determinada pelas componentes do vetor Υ na altura α . Resolvemos para cada α um problema PL do tipo 1, como no caso 2. A solução é obtida aplicando o teorema da representação dos α -níveis dos conjuntos do tipo 2 [9].

5 Resultados

No caso 1 (programação clássica) consideramos

$$H(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) = 0.6 \mathcal{G}_1 + 0.9 \mathcal{G}_2, \quad \Theta = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0.5 & -0.2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Upsilon = \begin{pmatrix} 0.64 \\ -0.58 \end{pmatrix},$$

onde a tolerância ϵ_1 é de $\pm 40\%$ e a tolerância ϵ_2 é de $\pm 10\%$. A solução ótima obtida é $H(0.9437, 0.4477) = 0.9691$.

No caso 2 são considerados os seguintes componentes:

$$H(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) = (0.3, 0.6, 1, 1) \mathcal{G}_1 + (0.3, 0.9, 1, 1) \mathcal{G}_2,$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} (0.6, 1.2, 2, 2) & (-1.4, -1.1, -1, -1) \\ (0.5, 0.5, 0.7, 0.85) & (-0.2, -0.2, -0.18, -0.12) \end{pmatrix} \text{ e } \Upsilon = \begin{pmatrix} \overline{0.64} \\ -0.58 \end{pmatrix}.$$

Escolhendo $\alpha_E = \alpha_D = 1$, resulta $g_{\alpha_D}(A) = n$ e $g_{\alpha_E} = m$ e, desta maneira, o ponto ótimo do caso 2 coincide com o do caso 1 e o valor ótimo é o mínimo do nível 1 do número fuzzy ótimo:

$$H(0.9437, 0.4477) = (0.5517, 0.9691, 1.3913, 1.3913).$$

No caso 3, os componentes $H(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ e Θ são conjuntos fuzzy singleton do tipo 2, gerados pelos mesmos componentes do caso 2. Para o vetor Υ descrito na seção 3 são escolhidos os valores $\gamma_E = 0.3$, $\gamma_D = 0.5$, e para as defuzzificações números próximos de 1, $\alpha_E = 0.9$ e $\alpha_D = 0.85$, baseado na defuzzificação do caso 2. O ponto ótimo é um número fuzzy do tipo 1, pois para cada nível obtemos um ponto ótimo (crisp) e um trapézio correspondente à solução ótima nesse ponto. Assim, o ponto fuzzy ótimo tem como universo a reta determinada pelo ponto ótimo de nível zero e de nível um, que na Figura 2 é representado pelos pontos em cor preta. A função de pertinência é a reta determinada pelos pontos no espaço, cujas as duas primeiras coordenadas são as do ponto ótimo de nível zero e de nível um e a terceira coordenada é zero e um, respectivamente. Na Figura 3 é mostrado o gráfico da solução ótima do tipo 2, obtida a partir de cada ponto ótimo da Figura 2 e sua correspondente solução fuzzy ótima, que é do nível do ponto. O degradê das cores, de azul até vermelho, em ambas as figuras são correspondentes e representam o nível de pertinência de 0 a 1.

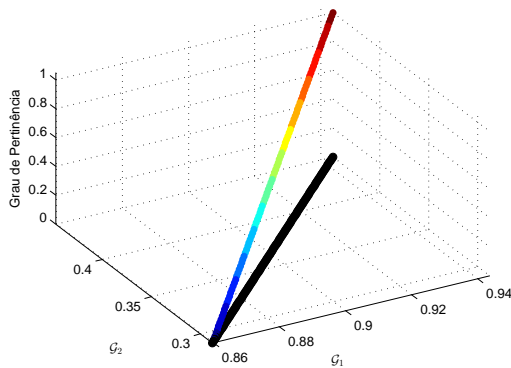


Figura 2: Ponto fuzzy ótimo do caso 3; os menores graus de pertinência secundários estão representados em azul e os maiores graus de pertinência secundários em vermelho escuro.

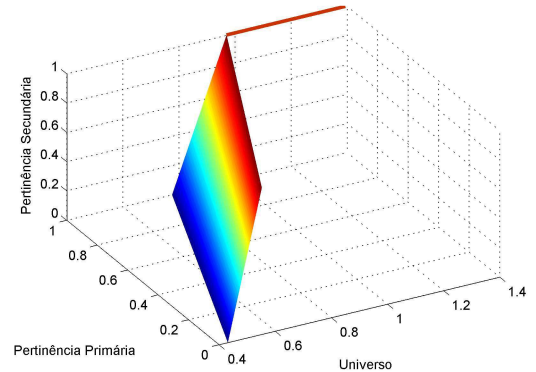


Figura 3: Solução ótima do caso 3; os menores graus de pertinência secundários estão representados em azul e os maiores graus de pertinência secundários em vermelho escuro.

6 Conclusão

Enfatizando a incerteza presente nas tolerâncias de um circuito elétrico sugeridas pelo fabricante de aparelhos, propomos um problema de programação linear fuzzy. Com o objetivo de validar os resultados obtidos é resolvido o problema de programação linear clássica. A solução fuzzy ótima do tipo 1 é obtida utilizando o método de ordem por defuzzificação que permite transformar o problema fuzzy em uma programação linear clássica. Para construir uma ordem que fornecesse um número próximo da componente clássica, no espaço dos números fuzzy trapezoidais são considerados dois tipos de subspaços. As ordens escolhidas sobre estes conjuntos dependem parametricamente de números reais entre zero e um. Considerando estes parâmetros de defuzzificação iguais a um, é obtido o mesmo ponto ótimo e o máximo da função objetivo clássica coincidindo com o mínimo do núcleo da solução trapezoidal do tipo 1. Completando o estudo, é feita a programação linear do modelo com componentes fuzzy do tipo 2. A solução é obtida pelo teorema da representação dos α -níveis, resolvendo em cada nível um problema de programação linear do tipo 1. Neste caso, utilizamos as mesmas ordens de defuzzificação com parâmetros de defuzzificação próximos de um, obtendo como ponto fuzzy ótimo de pertinência um muito próximo do ponto ótimo clássico.

Referências

- [1] J.J. Salazar Gonzalez. Optimizacion matematica: Ejemplos y aplicaciones. Technical report, Universidad de La Laguna, Espana, <https://imarrero.webs.ull.es/sctm03.v2/>, 2003.
- [2] P.J. Villacorta, C.A. Rabelo, D.A. Pelta, and J.L. Verdegay. *FuzzyLP: An R package for solving Fuzzy Linear Programming problems*. Springer, 2015. Book chapter, accepted for publication.
- [3] L.A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.
- [4] N. N. Karnik, J. M. Mendel, and Q. Liang. Type-2 fuzzy logic systems. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 7:643 – 658, 1999.
- [5] D. Dubois and H. Prade. Operations on fuzzy numbers. *International Journal of Systems Science*, 9:613–626, 1978.
- [6] H. Prade, R.R. Yager, and D. Dubois, editors. *Readings in Fuzzy Sets for Intelligent Systems*. Morgan Kaufmann Publishers, 1993.
- [7] J.M. Adamo. Fuzzy decision trees. *Fuzzy Sets and Systems*, 4:207–219, 1980.
- [8] J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer-Verlag, 2006.
- [9] H. Hamrawi, S. Coupland, and R. John. A novel alpha-cut representation for type-2 fuzzy sets. In *Proc. of IEEE World Congress on Computational Intelligence*, pages 351–358, Barcelona, Spain, 2010.