Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Um método de reescalamento não-linear integrado

Ricardo B. N. M. Pinheiro[1]
LASEE - Departamento de Engenharia Elétrica, EESC - USP, São Carlos, SP
Guilherme G. Lage[2]
CCET - Departamento de Engenharia Elétrica, UFSCar, São Carlos, SP
Diego N. da Silva[3]
LASEE - Departamento de Engenharia Elétrica, EESC - USP, São Carlos, SP
Geraldo R. M. da Costa[4]
LASEE - Departamento de Engenharia Elétrica, EESC - USP, São Carlos, SP

Resumo. Neste trabalho, propomos um método de reescalamento não-linear integrado, o qual mescla as famílias de funções penalidades não-quadráticas desenvolvidas por Polyak e Teboulle [11] e Matioli e Gonzaga [7] para os métodos de lagrangiano aumentado. Além disso, definimos uma nova função para ser usada como penalidade para as restrições de desigualdade e uma abordagem primal-dual do tipo previsor-corretor. Aplicamos o método proposto no problema de fluxo de potencia ótimo reativo, da engenharia elétrica, ao sistema elétrico de 118 barras.

Palavras-chave. Método de reescalamento não-linear, função lagrangiana aumentada, distâncias de Bragman e entrópicas, método dual de ponto proximal, fluxo de potência ótimo reativo.

1 Introdução

O método de ponto proximal em programação convexa permanece em intensa investigação até os dias atuais. Sua invenção é atribuída a Martinet [6], cujas ideias foram amplamente desenvolvidas por Rockafellar [12]. Embasados em [5, 13], o método clássico de ponto proximal consiste em minimizar uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexa por meio de uma sequência $\{\mathbf{x^k}\}$ gerada conforme (1):

$$\mathbf{x^{k+1}} = \arg\min \left\{ f\left(\mathbf{x}\right) + \mu_k (2)^{-1} \left\| \mathbf{x} - \mathbf{x^k} \right\|^2 \right\}, \tag{1}$$

em que $\{\mu_k\}$ é uma sequência em $\mathbb{R}_{++}$ e $\|\mathbf{.}\|$ é a norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$. O algoritmo apresentado em (1) é generalizado por meio da formulação $\mathbf{x^{k+1}} = \arg\min \left\{ f\left(\mathbf{x}\right) + \mu_k \mathcal{D}\left(\mathbf{x}, \mathbf{x^k}\right) \right\}$, em que $\mathcal{D} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ é uma função cujo significado representa um modo de medirmos

[1]rbnpinheiro@usp.br
[2]glage@ufscar.br
[3]diegoitapeva996@hotmail.com
[4]geraldo@sc.usp.br

a distância de um vetor $\mathbf{a}$ para o vetor $\mathbf{b}$ e que ao menos possua as seguintes proporiedades: $\mathcal{D}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b}$ e $\mathcal{D}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) > 0, \forall \mathbf{a} \neq \mathbf{b}$.

As medidas de distância $\mathcal{D}$ mais conhecidas e utilizadas são as distâncias de Bregman [2,7,8] e as medidas entrópicas φ-divergente [5,11,13]. Uma exceção é apresentada em [1], pois o autor utiliza uma medida de distância que não é nem uma distância de Bregman nem uma medida entrópica. Todavia, em geral, as medidas de distâncias $\mathcal{D}$ são induzidas por funções não-quadráticas cujo domínio pode ser um subconjunto do $\mathbb{R}^n$.

Em problemas de otimização convexa, nos quais a condição de Slater é satisfeita, Matioli e Gonzaga [7] e Polyak e Teboulle [11] aplicaram, respectivamente, as medidas de distância de Bregman e as medidas φ-divergente para induzir o método de ponto proximal no espaço dual associado ao problema primal. As medidas de distâncias são induzidas por meio do conjugado convexo de uma função não-quadrática ψ, a qual está em um conjunto $\mathbb{H}$ mediante a propriedades específicas. A finalidade desta função, em princípio, é penalizar as restrições de desigualdade do problema primal.

Foi demonstrado pelos autores que resolver o método dual de ponto proximal é totalmente equivalente a resolver o problema primal mediante o princípio de reescalamento não-linear vinculado a uma das duas classes de lagrangiano aumentado. Para distinguir uma classe da outra, Matioli e Gonzaga denominaram por classe $\mathbb{P}_1$ às funções penalidades associadas ao método de lagrangiano aumentado, cujo conjugado convexo induz uma distância de Bregman para método dual de ponto proximal; por classe $\mathbb{P}_2$ à classe funções penalidades vinculadas ao método de lagrangiano aumentado, cujo conjugado convexo induz uma medida entrópica φ-divergente para o método dual de ponto proximal.

Neste trabalho propomos uma abordagem de lagrangiano aumentado, no sentido do princípio de reescalamento não-linear, a qual integra as classes $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$ de funções penalidades. Apresentamos uma nova função ψ cujo conjugado convexo é a função logarítmica-quadrática, a qual é variante a de Auslender [1]. Entretanto, a medida de distância difere-se substancialmente a de Auslender e de Gregório e Oliveira [4]. Nós apresentamos uma abordagem primal-dual de reescalamento não-linear integrado no sentido de Griva e Polyak [3] com estratégia previsor-corretor proposta por Pinheiro [9]. Aplicamos o método previsor-corretor primal-dual de reescalamento não-linear integrado ao problema de fluxo de potência ótimo reativo vinculado ao sistema elétrico de 118 barras.

2 Medidas de distância de Bregman e entrópicas

De acordo com Teboulle [13], seja $\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função convexa de classe C^1, então a medida de distância de Bregman induzida por ν é expressa em (2):

$$\mathcal{D}_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \nu(\mathbf{x}) - \nu(\mathbf{y}) - \nabla\nu(\mathbf{y})^T(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \ \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n). \tag{2}$$

Seja $\mathbb{F}$ o conjunto das funções $\varphi : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}_+$, as quais possuem as seguintes propriedades: $\varphi(1) = \varphi'(1) = 0$; φ é de classe C^∞, $\varphi'(s) < 0$, para todo $s \in (0,1)$; $\varphi'(s) > 0$, para todo $s \in (0,1)$; $\varphi''(s) > 0$, para todo $s \in \mathbb{R}_{++}$ e; $\lim_{s \to 0^+} \varphi(s) = a$, $0 < a \leq \infty$. Então, a medida entrópica φ-divergente induzida por φ é conforme (3):

$$d_\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum\nolimits_{j=1}^{n} y_j \varphi\left(y_j^{-1} x_j\right), \ \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \left(\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}\right). \tag{3}$$

Por fim, sejam $\varphi \in \mathbb{F}$, $\nu(\mathbf{s}) = \sum_{j=1}^{n} \varphi(s_i)$ e a função $\mathcal{B}_\varphi(x,y) = \varphi(x) - \varphi(y) - \varphi'(y)(x-y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++}$. Então uma maneira de relacionarmos as medidas de distância de Bregman com as medidas entrópicas, mediante a função $\mathcal{B}_\varphi$, é dada por:

$$\mathcal{D}_\nu(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{r} \mathcal{B}_\varphi\left(y_j^{-1}x_j, 1\right) = \sum_{j=1}^{r} \varphi\left(y_j^{-1}x_j\right),\ \forall(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \left(\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}\right) \tag{4}$$

e

$$d_\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{r} y_j \mathcal{B}_\varphi\left(y_j^{-1}x_j, 1\right) = \sum_{j=1}^{r} b_j \varphi\left(y_j^{-1}x_j\right),\ \forall(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \left(\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}\right) \tag{5}$$

3 Método de Reescalamento não-linear Integrado

Considere o problema de programação não-linear:

$$\underset{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}{Min} \left\{f(\mathbf{x}) : h_i(\mathbf{x}) \leq 0, \forall i = 1,...,r\right\}, \tag{6}$$

em que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são funções convexas de classe C^1. O conjunto viável do problema (6) é $\mathbb{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; h_i(\mathbf{x}) \leq 0, \forall i = 1,...,r\}$ e assumimos que o problema (6) satisfaz as condições de Slater e que o conjunto das soluções ótimas $\mathbb{X}^* = \{\mathbf{x}^* \in \mathbb{X}; f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})\}$ é não-vazio e limitado. Mediante a condição de Slater, existe um vetor $\lambda^* = (\lambda_1^*, ..., \lambda_i^*, ..., \lambda_r^*)^T \in \mathbb{R}^r_+$ de multiplicadores de Lagrange tal que as equações (7) e (8) a seguir são consistentes

$$\nabla_x L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = \nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum\nolimits_{i=1}^{r} \lambda_i^* \nabla h_i(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}, \tag{7}$$

$$\min\left(\lambda_i^*, -h_i(\mathbf{x}^*)\right) = 0 \quad, \forall i = 1,...,r, \tag{8}$$

em que $L(\mathbf{x},\lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i h_i(\mathbf{x})$ é a função lagrangiana. O problema dual associado à (6) é:

$$\max_{\lambda\in\mathbb{R}^r} \left\{d(\lambda) : \lambda_i \geq 0, \forall i = 1,...,r\right\}, \tag{9}$$

onde $d(\lambda) = \inf\{L(\mathbf{x},\lambda); \mathbf{x} \in \mathbb{X}\}$ é a função dual. Neste trabalho, a função lagrangiana aumentada vinculada ao problema (6) é definida em (10):

$$L(\mathbf{x},\lambda,\mu) = f(\mathbf{x}) + \mu \sum\nolimits_{i=1}^{r} \frac{\lambda_i}{(\alpha + (1-\alpha)\lambda_i)} \psi\left(\mu^{-1}(\alpha + (1-\alpha)\lambda_i) h_i(\mathbf{x})\right), \tag{10}$$

para algum $\alpha \in [0,1]$ e fixo. O escalar $\mu \in \mathbb{R}_{++}$ é denominado parâmetro de reescala; a função $\psi : \mathbb{T} = (-\infty, b) \to \mathbb{R}$, com $0 < b \leq \infty$, é elemento do conjunto $\mathbb{H}$ de funções convexas que possuem as seguintes propriedades [7, 11]: ψ é de classe C^∞; $\psi(0) = 0$; $\psi'(0) = 1$; $\lim\limits_{t\to-\infty} \psi'(t) = 0$; $\lim\limits_{t\to b^-} \psi'(t) = \infty$; $\psi'(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{T}$ e; $\psi''(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{T}$. Se $\alpha = 0$, então (10) é exatamente a lagrangiana aumentada proposta por Matioli e Gonzaga [7] e se $\alpha = 1$, então (10) torna-se a lagrangiana aumentada de

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0478

Polyak e Teboulle [11]. A classe de funções penalidades é o conjunto $\mathbb{P}_{\text{int}}$ das funções $\eta : (\mathbb{T} \times \mathbb{R}_{++} \times [0,1]) \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$\eta_\psi (t, \lambda, \alpha) = \lambda(\alpha + (1-\alpha)\,\lambda)^{-1} \psi\left((\alpha + (1-\alpha)\,\lambda)\, t\right). \tag{11}$$

No sentido de Matioli e Gonzaga [7], se $\alpha = 0$, então a classe $\mathbb{P}_{\text{int}} = \mathbb{P}_1$ e que se $\alpha = 1$, então a classe $\mathbb{P}_{\text{int}} = \mathbb{P}_2$. O princípio de reescalamento não-linear consiste em resolver uma sequência de minimizações irrestritas da lagrangiana aumentada (10) seguido de atualizações dos multiplicadores de Lagrange. Em sentido de método, este princípio é transcrito da seguinte forma: Seja $k = 0, 1, 2, ...$, então dado um par $\left(\lambda_{\mathbf{0}}^{\mathbf{0}}, \mu_0\right) \in \mathbb{R}^{r+1}_{++}$ e um $\alpha \in [0,1]$, então determine $\mathbf{x^{k+1}} = \operatorname{argmin} \left\{L\left(\mathbf{x}, \lambda^{\mathbf{k}}, \mu_k\right), \mathbf{x} \in \mathbb{X}\right\}$ e, então, faça:

$$\lambda_{i_{k+1}} = \psi'\left(\mu_k^{-1} (\alpha + (1-\alpha)\,\lambda_{i_k})\, h_i\left(\mathbf{x^{k+1}}\right)\right) \lambda_{i_k} \quad , \forall i = 1, ..., r. \tag{12}$$

Agora, devido à existência de ψ'^{-1} , o conjugado convexo de ψ, o qual é dado por $\varphi(s) = \sup\{st - \psi(t), t \in \mathbb{T}\}$, está bem definido. Como $\varphi' = \psi'^{-1}$, segue, a partir da expressão (12), a expressão (13):

$$h_i\left(\mathbf{x^{k+1}}\right) - \mu_k (\alpha + (1-\alpha)\,\lambda_{i_k})^{-1} \varphi'\left(\lambda_{i_k}^{-1} \lambda_{i_{k+1}}\right) = 0. \tag{13}$$

Isso significa que $\lambda_{i_{k+1}}$ é solução para condição de primeira ordem do método dual de ponto proximal apresentado em (14):

$$\lambda^{\mathbf{k+1}} = \arg\max \left\{ d(\lambda) - \mu_k \sum_{i=1}^{r} (\alpha + (1-\alpha)\,\lambda_{i_k})^{-1} \lambda_{i_k} \varphi\left(\lambda_{i_k}^{-1} \lambda_i\right); \lambda \in \mathbb{R}^r_{++} \right\}. \tag{14}$$

Pelas expressões (4) e (5), a medida de distância aplicada ao par $\left(\lambda,\lambda^{\mathbf{k}}\right)$ não é nem uma distância de Bregman nem entrópica φ-divergente para qualquer $\alpha \in (0,1)$. Todavia, se $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$, então recuperamos, respectivamente, os métodos dual de ponto proximal de Matioli e Gonzaga e de Polyak e Teboulle. Neste trabalho, propomos a função:

$$\mathbb{H} \ni \psi(t) = \ln\left(\tfrac{1}{2}\left(t + \sqrt{t^2+4}\right)\right) + \frac{t^2 + t\sqrt{t^2+4}}{4}. \tag{15}$$

Suas propriedades são: $\mathbb{T} = \mathbb{R}$; trata-se de uma função convexa imprópria, isto é, $\psi(t) \geq -\infty$, para todo $t \in \mathbb{T}$; $\psi'(t) = \frac{t+\sqrt{t^2+4}}{2}$; $\psi''(t) = \frac{t\sqrt{t^2+4}+t^2+4}{2(t^2+4)}$; $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1}\psi(t) = \infty$ (coerciva a direita) e; seu conjugado convexo é a função logarítmica-quadrática $\varphi(s) = -\ln(s) + 2^{-1}\left(s^2 - 1\right)$, a qual é uma variante apresentada por Auslender [1]. Todavia, a indução de uma medida de distância de Bregman ou entrópica difere substancialmente a de Auslender e a de Gregório e Oliveira [4], pois a proposta do *integrado* mescla ponderadamente as características de ambas medidas de distância para qualquer $\alpha \in [0,1]$.

4 Método primal-dual de reescalamento não-linear integrado

Seja o problema (16), o qual assumirmos as soluções ótima primal e dual estão bem definidas.

$$\underset{(\mathbf{x},\mathbf{z_1}) \in \mathbb{R}^{n+r}}{Min} \; \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}; \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{z_1} = \mathbf{0}; -\mathbf{z_1} \leq \mathbf{0}\} \tag{16}$$

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0478

em que: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ são funções não-convexas pelo menos de classe C^2 e $\mathbf{z_1}$ é o vetor de variáveis de folgas vinculadas à restrição $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$. A lagrangiana aumentada associada à (16) é:

$$L(\omega) = f(\mathbf{x}) + \lambda_{\mathbf{0}}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \lambda_{\mathbf{1}}^{\mathbf{T}} (\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{z_1}) + \mu \sum\nolimits_{i=1}^{r} \eta_\psi \left(-\mu^{-1} z_{1_i}, \delta_{1_i}, \alpha\right), \tag{17}$$

onde: $\omega = \left(\mathbf{x}^T, \mathbf{z_1}^T, \lambda_{\mathbf{0}}^T, \lambda_{\mathbf{1}}^T\right)^T$; $\lambda_{\mathbf{0}} = (\lambda_{0_1}, ..., \lambda_{0_m})^T \in \mathbb{R}^m$, $\lambda_{\mathbf{1}} = (\lambda_{1_1}, ..., \lambda_{1_r})^T \in \mathbb{R}^r_+$ são respectivamente os vetores duais vinculados à $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ e à $\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{z_1} = \mathbf{0}$ e $\delta_{\mathbf{1}} = (\delta_{1_1}, ..., \delta_{1_r})^T \in \mathbb{R}^r_{++}$ é o parâmetro dual, o qual é uma estimativa para $\lambda_{\mathbf{1}}$. O método primal-dual seguido de atualizações *dinâmicas* dos parâmetros foi proposto por Griva e Polyak [3] e uma estratégia previsor-corretor para este método foi apresentado por Pinheiro [9]. A abordagem primal-dual consiste em gerar uma sequência $\{\omega^{\mathbf{k}}\}$ seguida de atualizações do vetor $\left(\mu_k, \delta^{\mathbf{k}}\right) \in \mathbb{R}^{r+1}_{++}$ de parâmetros até que $\lim\limits_{k\to\infty} \left\|\nabla L\left(\omega^{\mathbf{k}}\right)\right\| = 0$. Neste trabalho, a sequência $\{\omega^{\mathbf{k}}\}$ é gerada ao efetuarmos dois passos do método de Newton por iteração para o cálculo das direções de busca primal e dual. O primeiro é denominado previsor enquanto que o segundo é denominado corretor. As direções de busca são definidas em (18):

$$\begin{array}{l}
\mathbf{d}^{\mathbf{k}}_{\lambda_\mathbf{0}} = \left(\nabla\mathbf{g}\left(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}\right)\theta_k^{-1}\nabla\mathbf{g}\left(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}\right)^T\right)^{-1}\left(\nabla\mathbf{g}\left(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}\right)\theta_k^{-1}\left(\mathbf{r}^{\mathbf{k}}_\mu - \nabla\mathbf{h}\left(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}\right)^T\mathbf{c}^{\mathbf{k}}\right) + \mathbf{g}\left(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}\right)\right) - \lambda^{\mathbf{k}}_{\mathbf{0}} \\
\mathbf{d}^{\mathbf{k}}_{\mathbf{x}} = \theta_k^{-1}\left(\mathbf{r}^{\mathbf{k}}_\mu - \nabla\mathbf{h}\left(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}\right)^T\mathbf{c}^{\mathbf{k}} - \nabla\mathbf{g}\left(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}\right)^T\left(\lambda^{\mathbf{k}}_{\mathbf{0}} + \mathbf{d}^{\mathbf{k}}_{\lambda_\mathbf{0}}\right)\right) \\
\mathbf{d}^{\mathbf{k}}_{\mathbf{z_1}} = -\nabla\mathbf{h}\left(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}\right)\mathbf{d}^{\mathbf{k}}_{\mathbf{x}} - \left(\mathbf{h}\left(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}\right) + \mathbf{z}^{\mathbf{k}}_{\mathbf{1}}\right) \\
\mathbf{d}^{\mathbf{k}}_{\lambda_\mathbf{1}} = -\mu_k^{-1}\Delta_{\alpha_k}\dot{\Psi}^{-1}\ddot{\Psi}\Lambda_{1_k}\mathbf{d}^{\mathbf{k}}_{\mathbf{z_1}} + \mathbf{c}^{\mathbf{k}} + \mu_k\dot{\Psi}\delta^{\mathbf{k}}_{\mathbf{1}} - \lambda^{\mathbf{k}}_{\mathbf{1}}
\end{array}, \tag{18}$$

onde: $\mathbf{r}^{\mathbf{k}}_\mu = -\nabla f\left(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}\right) - \mu_k^{-1}\nabla\mathbf{h}\left(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}\right)^T\left(\Delta_{\alpha_k}\dot{\Psi}^{-1}\ddot{\Psi}\Lambda_{1_k}\left(\mathbf{h}\left(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}\right) + \mathbf{z}^{\mathbf{k}}_{\mathbf{1}}\right) + \mu_k\dot{\Psi}\delta^{\mathbf{k}}_{\mathbf{1}}\right)$, $\Lambda_{1_k} = diag\left(\lambda^k_{1_i}\right)^r_{i=1}$, $\dot{\Psi} = diag\left(\psi'\left(-\mu_k^{-1}\left(\alpha + (1-\alpha)\,\delta^k_{1_i}\right)z^k_{1_i}\right)\right)^r_{i=1}$, $\Delta_{\alpha_k} = diag\left(\left(\alpha + (1-\alpha)\right)\delta^k_{1_i}\right)^r_{j=1}$, $\ddot{\Psi} = diag\left(\psi''\left(-\mu_k^{-1}\left(\alpha + (1-\alpha)\,\delta^k_{1_i}\right)z^k_{1_i}\right)\right)^r_{i=1}$, $\mathbf{c}^{\mathbf{k}} = \mathbf{0}$, se o passo é o previsor e $\mathbf{c}^{\mathbf{k}} = -\mu_k^{-1}\Delta_{\alpha_k}\dot{\Psi}^{-1}\ddot{\Psi}D_{z^k_1}\mathbf{d}^{\mathbf{k}}_{\lambda_\mathbf{1}}$ se o passo é o corretor, $D_{\mathbf{z}^{\mathbf{k}}_{\mathbf{1}}} = diag\left(d^k_{z_{1_i}}\right)^r_{i=1}$ e

$$\theta_k = \nabla^2 f\left(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}\right) + \sum_{t=1}^{m}\lambda^k_{0_t}\nabla^2 g_t\left(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}\right) + \sum_{i=1}^{r}\lambda^k_{1_i}\nabla^2 h_i\left(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}\right) + \mu_k^{-1}\nabla\mathbf{h}\left(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}\right)^T\Delta_{\alpha_k}\dot{\Psi}^{-1}\ddot{\Psi}\Lambda_{1_k}\nabla\mathbf{h}\left(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}\right).$$

O cálculo do tamanho do passo, atualizações dos parâmetros e uma estratégia para a regularização da matriz θ_k é feito de acordo com Pinheiro [10].

5 Resultados numéricos

Nesta seção, apresentamos um desempenho, o qual enfatizamos à escolha para α, da proposta do método primal-dual de reescalamento não linear integrado. Aplicamos ao problema de fluxo de potência ótimo descrito, da engenharia elétrica, somente para o sistema elétrico de 118 barras. A formulação do problema e dados de entrada para o método são descritos em Pinheiro [10]. A função $\psi(t)$ escolhida para obtermos os resultados é aquela apresentada em (15).

Tabela 1: Desempenho método primal-dual de reescalamento não linear integrado em função da escolha de α.

α	k iterações	Perdas MW	$L\left(\omega^{\mathbf{k}}\right)$	$\left\|\nabla L\left(\omega^{\mathbf{k}}\right)\right\|$
0	8	119,134741	118,810768	5,26E-05
0,1	9	119,128327	119,12816	2,07E-05
0,2	9	119,1283	119,128159	1,79E-05
0,3	9	119,128412	119,128194	1,08E-05
0,4	8	119,12882	119,128243	9,37E-05
0,5	8	119,128757	119,128238	8,71E-05
0,6	8	119,128706	119,128234	8,62E-05
0,7	8	119,128663	119,128231	8,51E-05
0,8	8	119,128625	119,12823	8,37E-05
0,9	8	119,128585	119,128228	8,19E-05
1	8	119,128539	119,128224	7,96E-05

Os resultados mostram que a proposta do método de reescalamento não-linear integrado é eficiente. Neste exemplo, a escolha para α inferiu apenas no número de iterações em alguns casos. Em outras aplicações, nós constatamos que o método falhou ou obteve sucesso ao escolhermos um α ao impormos os mesmos dados de entrada.

6 Conclusões

Neste trabalho, foi apresentado um método de reescalamento não-linear integrado. Mostramos que a classe de funções penalidades para os métodos de lagrangiano aumentado proposto contém, em particular, as classes desenvolvidas por Matioli e Gonzaga e de Polyak e Teboulle. Mostramos que o método é equivalente ao método dual de ponto proximal, cuja medida de distância contém características das medidas de distâncias de Bregman e entrópicas φ-divergente. Além disso, definimos uma nova função para ser usada como penalidade, cuja propriedade é que seu conjugado convexo é a função logarítmica quadrática, a qual é uma variante a Auslender. Por fim, aplicamos com sucesso o método proposto no problema de fluxo de potencia ótimo reativo, ao sistema elétrico de 118 barras. Os resultados mostram que a abordagem integrada é uma nova opção junto aos métodos de lagrangiano aumentado que são embasados no princípio de reescalamento não-linear.

Agradecimentos

Os autores agradecem à CAPES pelo financiamento desta pesquisa.

Referências

[1] A. Auslender, M. Teboulle, and S. Ben-Tiba. A Logarithmic-Quadratic Proximal Method for Variational Inequalities. In Jong-Shi Pang, editor, *Computational Opti-*

mization, pages 31–40. Springer US, 1999. DOI: 10.1007/978-1-4615-5197-3_3.

[2] L. M. Bregman. The relaxation method of finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 7(3):200–217, 1967.

[3] I. Griva and R. A. Polyak. Primal-dual nonlinear rescaling method with dynamic scaling parameter update. *Mathematical Programming*, 106(2):237–259, 2006.

[4] R. Gregório and P. R. Oliveira. A logarithmic-quadratic proximal point scalarization method for multiobjective programming. *Journal of Global Optimization*, 49(2):281–291, April 2010.

[5] A. N. Iusem, B. F. Svaiter, and M. Teboulle. Entropy-Like Proximal Methods in Convex Programming. *Mathematics of Operations Research*, 19(4):790–814, November 1994.

[6] B. Martinet. Perturbation des méthodes d'optimisation. Applications. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 12(2):153–171, 1978.

[7] L. C. Matioli and C. C. Gonzaga. A new family of penalties for augmented Lagrangian methods. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 15(10):925–944, December 2008.

[8] A. R. De Pierro and A. N. Iusem. A relaxed version of Bregman's method for convex programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 51(3):421–440, December 1986.

[9] R. B. N. Pinheiro, A. R. Balbo, E. C. Baptista, and L. Nepomuceno. Interior - exterior point method with global convergence strategy for solving the reactive optimal power flow problem. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 66:235–246, March 2015.

[10] R. B. N. M. Pinheiro, G. G. Lage, and G. R. M. da Costa. O método previsor-corretor primal-dual de reescalamento não-linear M2BF aplicado ao fluxo de potência ótimo reativo. *Anais do Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (XLVII SBPO)*, pages 1074–1085, 2015.

[11] R. Polyak and M. Teboulle. Nonlinear rescaling and proximal-like methods in convex optimization. *Mathematical Programming*, 76(2):265–284, February 1997.

[12] R. Rockafellar. Monotone Operators and the Proximal Point Algorithm. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 14(5):877–898, August 1976.

[13] M. Teboulle. Entropic Proximal Mappings with Applications to Nonlinear Programming. *Mathematics of Operations Research*, 17(3):670–690, August 1992.

