Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

Trabalho apresentado no CNMAC, Gramado - RS, 2016.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Condições de otimalidade para problemas de controle ótimo discreto multiobjetivos

Camila Isoton[1]
Programa de Pós Graduação em Matemática, UFPR, Curitiba, PR
Marko Antônio Rojas Medar[2]
Instituto de Alta Investigación, Universidad de Tarapacá, Arica, Chile
Violeta Vivanco Orellanas[3]
Dpto. de Matemáticas, Universidad Católica de la Santísima Concepción, Concepción, Chile
Lucelina Batista dos Santos[4]
Departamento de Matemática, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR

Resumo. Neste trabalho, obtemos condições necessárias de otimalidade para a eficiência fraca para problemas de controle ótimo discreto. Abordamos o problema com restrições de igualdade e de desigualdade sobre o estado e o controle e uma condição de contorno. Assumimos ainda, que as funções envolvidas no problema são continuamente diferenciáveis. As condições necessárias (Princípio do Máximo Discreto) foram obtidas através do formalismo de Dubovitskii-Milyutin (DM).

Palavras-chave. Problemas multiobjetivos; Problema de Controle Ótimo Discreto; Condições de Otimalidade; Princípio do Máximo; Formalismo de Dubovitskii-Milyutin

1 Introdução

Existem inúmeros problemas de tomada de decisão onde se deseja otimizar mais do que um objetivo os quais frequentemente são conflitantes. Tais problemas são denominados problemas multiobjetivo.

Especificamente, neste trabalho são considerados problemas de controle ótimo discreto multiobjetivos.

As condições de otimalidade para o problema de controle ótimo (com um único objetivo) são dadas através do conhecido *Princípio do Máximo de Pontryagin*, o qual apresenta uma versão para o problema de controle ótimo discreto. Este princípio pode ser demonstrado usando diferentes técnicas. Veja por exemplo [2, 4, 6, 8, 9].

Por outro lado, o *formalismo de Dubovitski-Milyutin*, o qual denotamos (DM) por simplicidade, é uma importante ferramenta para o tratamento de uma ampla classe de

[1]isoton.camila@gmail.com
[2]marko.medar@gmail.com
[3]vvivanco@ucsc.cl
[4]lucelina@ufpr.br

problemas de otimização, formulados em contexto mais abstrato, isto é, cujas funções do problema estão definidas em espaços abstratos e, portanto, pode ser utilizado para o tratamento dos mais diversos problemas, como por exemplo, o Problema de Programação Matemática, o Problema do Cálculo das Variações, o Problema de Controle Ótimo dentre outros. Além disto, existem variantes deste formalismo para problemas multiobjetivos. Veja [3, 5, 7].

Neste trabalho obtivemos condições necessárias de otimalidade para o problema de controle ótimo discreto multiobjetivo, utilizando o formalismo DM. Abordamos o problema com restrições de igualdade e de desigualdade sobre o estado e o controle e uma condição de contorno. Assumimos ainda, que as funções envolvidas no problema são continuamente diferenciáveis.

2 Preliminares técnicos e formulação do problema

Inicialmente, consideramos o seguinte problema:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Minimizar } f(x) := (f_1(x), \cdots, f_p(x)) \\ \text{sujeito a: } x \in Q\end{array}\right\} \qquad (\mathbf{MOP})$$

onde $f_j : X \to \mathbb{R}$, $j = 1, \cdots, p$ e X é um espaço de Banach. Dizemos que $x^* \in Q$ é uma **solução fracamente eficiente** [5] se não existe $x \in Q$ tal que $f_j(x) < f_j(x^*)$, para todo $j = 1, \cdots, p$.

Agora, suponha $Q = \bigcap_{i=1}^{k+1} Q_i$, onde $\operatorname{int} Q_i \neq \varnothing$, $i = 1, \cdots, k$ (tais Q_i são chamados **restrições de desigualdade**) e $\operatorname{int} Q_{k+1} = \varnothing$ (neste caso, Q_{k+1} é chamado **restrição de igualdade**).

- Seja $\phi : X \to \mathbb{R}$ uma função dada. Dizemos que $w \in X$ é uma **direção de descida** de ϕ em $x_0 \in X$ se existem uma vizinhança V de w, $\alpha < 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ tais que $\phi(x_0 + \varepsilon\overline{w}) \leq \phi(x_0) + \alpha\varepsilon$, $\forall \overline{w} \in V, \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

- Seja $Q \subset X$ tal que $\operatorname{int} Q \neq \varnothing$. Dizemos que $w \in X$ é uma **direção factível** para Q em $x_0 \in X$ se existem uma vizinhança V de w e $\varepsilon_0 > 0$ tais que $x_0 + \varepsilon\overline{w}, \forall \overline{w} \in V, \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

- Seja $Q \subset X$ tal que $\operatorname{int} Q \neq \varnothing$. Dizemos que $w \in X$ é uma **direção tangente** para Q em $x_0 \in X$ se para qualquer $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\exists x_\varepsilon \in Q$ tal que $x_\varepsilon = x_0 + \varepsilon w + r(\varepsilon)$, onde $r(\varepsilon) = o(\varepsilon)$.

Pode-se demonstrar que os conjuntos de direções de descida, factível e tangente são cones com vértice na origem; os dois primeiros são cones abertos e o cone tangente, em geral, não é aberto e nem fechado.

[5] ou ainda, Pareto Fraca.

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0479

Teorema 2.1. *(DM multiobjetivo) Sejam: D_i o cone de direções de descida de f_i ($i = 1, \cdots, p$), E_j o cone de direções factíveis de Q_j ($j = 1, \cdots, k$) e E_{k+1} o cone de direções tangentes de Q_{k+1}. Suponha que todos estes cones são convexos. Se $x^* \in Q$ é solução Pareto fraca de **(MOP)**, então existem funcionais $h_i \in D_i^*, l_j \in Q_j^*$($i = 1, \cdots, p$, $j = 1, \cdots, k+1$) [6] não todos nulos e tais que*

$$\sum_{i=1}^{p} h_i + \sum_{j=1}^{k+1} l_j = 0.$$

Observação 2.1. *Se além das hipóteses do teorema anterior tivermos $\bigcap_{i \neq r} D_i \cap \bigcap_{j=1}^{k+1} E_j \neq \varnothing$ para algum r, então $h_r \neq 0$. Neste caso dizemos que x^* é fracamente regular para **(MOP)** e se $h_r \neq 0$ para todo r, diremos que x^* é regular para **(MOP)**.*

Para maiores detalhes, veja [5, 6].

Sobre a notação utilizada:

(i) $[0, N] = \{0, 1, \cdots, N\}$ (intervalo discreto);

(ii) $\mathbb{R}^{n(N)} = \{(x_0, x_1, \cdots, x_{N-1}) : x_j \in \mathbb{R}^n, \forall j\}$.

No que segue, formulamos o *problema de controle discreto multiobjetivo* **(PCDM)**:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Minimizar } \Phi(x,u) := (\sum\limits_{i=0}^{N-1} f_1(x_i,u_i), \cdots, \sum\limits_{i=0}^{N-1} f_p(x_i,u_i)) \\ \text{sujeito a: } x_{i+1} = \varphi(x_i,u_i,i),\ i \in [0, N-1] \\ h_1(x_i) = 0,\ g_1(x_i) \leqq 0,\ i \in [0, \cdots, N] \\ h_2(u_i) = 0,\ g_2(u_i) \leqq 0,\ i \in [0, N-1] \\ K(x_0, x_N) = 0 \end{array}\right\} \qquad (\textbf{PCDM})$$

onde $f_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $j = 1, \cdots, p$; $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $h_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{r_1}$, $g_1 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{s_1}$, $h_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{r_2}$, $g_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{s_2}$ e $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ são funções continuamente diferenciáveis. Neste caso, x_i são as *variáveis de estado*; u_i são os *parâmetros de controle*; N é o *número de etapas*; $x = (x_0, \cdots, x_N)$ é a *trajetória* e $u = (u_1, \cdots, u_{N-1})$ é o *controle* associado a esta trajetória. Assumimos $r_1 \leq n$, $r_2 \leq m$ e $k \leq 2n$.

Por fim, cada par (x, u) que satisfaz as restrições de **(PCDM)** é um processo admissível e um par (x^*, u^*) é um *processo fracamente eficiente* para **(PCDM)** se não existe outro processo admissível (x^*, u^*) tal que $\sum\limits_{i=0}^{N-1} f_j(x_i, u_i) < \sum\limits_{i=0}^{N-1} f_j(x_i^*, u_i^*)$, para todo $j = 1, \cdots, p$.

3 Resultados

Sejam $X = \{x \in \mathbb{R}^{n(N+1)}; x_0 = 0\}$; $U = \mathbb{R}^{m(N)}$.

Observe que é possível reescrever o problema de controle **(PCDM)** como o seguinte problema multiobjetivo

$$\left.\begin{array}{l} \text{Minimizar } \Phi(x,u) = (\Phi_1(x,u), \cdots, \Phi_p(x,u)) \\ \text{sujeito a: } F(x,u) = 0, G(x,u) \leqq 0,\ (x,u) \in X \times U \end{array}\right\} \qquad (\textbf{POM})$$

[6]Se K é um cone, K^* é o *cone dual* de K, isto é $K^* = \{\xi \in X^* : \xi(x) \geq 0, \forall x \in K\}$.

onde:

$$\begin{aligned}
&\Phi_j(x,u) = \sum_{i=0}^{N-1} f_j(x_i,u_i) \in \mathbb{R}, j=1,\ldots,p\\
&F(x,u) = (F_1(x,u),\cdots,F_4(x,u)) \in \mathbb{R}^{n(N)}\times\mathbb{R}^{r_1(N+1)}\times\mathbb{R}^{r_2(N)}\times\mathbb{R}^{k},\\
&G(x,u) = (G_1(x,u),G_2(x,u)) \in \mathbb{R}^{s_1(N+1)}\times\mathbb{R}^{s_2(N)}.
\end{aligned}$$

Neste caso [7]:

$$\begin{aligned}
&F_1(x,u)(i) = x_{i+1} - \varphi(x_i,u_i,i), i\in[0,N-1]\\
&F_2(x,u)(i) = h_1(x_i), i\in[0,N];\ F_3(x,u)(i) = h_2(x_i), i\in[0,N-1]\\
&F_4(x,u) = K(x_0,x_N);\ G_1(x,u)(i) = g_1(x_i), i\in[0,N];\ G_2(x,u)(i) = g_2(u_i), i\in[0,N-1].
\end{aligned}$$

Ainda: $M_F = \{(x,u)\in X\times U : F(x,u)=0\}$, $M_G = \{(x,u)\in X\times U : G(x,u)\leqq 0\}$ são as restrições de igualdade e de desigualdade para **(POM)**.

Aplicando-se o formalismo de DM (Teorema 2.1) ao problema **(POM)**, obtemos:

Teorema 3.1. *[Princípio do Máximo Discreto] Seja $(\widehat{x},\widehat{u})$ um processo fracamente eficiente para* ***(PCDM)****. Então existe*

$$\lambda = (\nu,\lambda_1,\gamma^1,\gamma^2,\mu^1,\mu^2,p) \in \mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{r_1(N+1)}\times\mathbb{R}^{r_2(N)}\times\mathbb{R}^{s_1(N+1)}\times\mathbb{R}^{s_2(N+1)}\times\mathbb{R}^{n(N+1)},$$

satisfazendo

$$p_0 = (H_0)_{x_0}(\widehat{x}_0,\widehat{u}_0,p_1,\nu) - [\langle\lambda_1, K_{x_0}(\widehat{x}_0,\widehat{x}_N)\rangle + \langle\gamma_0^1, h_1'(\widehat{x}_0)\rangle + \langle\mu_0^1, g_1'(\widehat{x}_0)\rangle]; \tag{1}$$

$$p_i = (H_i)_{x_i}(\widehat{x}_i,\widehat{u}_i,p_{i+1},\nu) - [\langle\gamma_i^1, h_1'(\widehat{x}_i)\rangle + \langle\mu_i^1, g_1'(\widehat{x}_i)\rangle],\ i=1,\cdots,N-1; \tag{2}$$

$$p_N = -[\langle\lambda_1, K_{x_N}(\widehat{x}_0,\widehat{x}_N)\rangle + \langle\gamma_N^1, h_1'(\widehat{x}_N)\rangle + \langle\mu_N^1, g_1'(\widehat{x}_N)\rangle]; \tag{3}$$

$$(H_i)_{u_i}(\widehat{x}_i,\widehat{u}_i,p_{i+1},\nu) = \langle\gamma_i^2, h_1'(\widehat{u}_i)\rangle + \langle\mu_i^2, g_2'(\widehat{u}_i)\rangle,\ i=0,\cdots,N-1; \tag{4}$$

$$\langle\mu_i^1, g_1(\widehat{x}_i)\rangle = 0,\ i\in[0,N];\ \ \langle\mu_i^2, g_2(\widehat{u}_i)\rangle = 0,\ i\in[0,N-1] \tag{5}$$

onde para cada $i\in[0,N-1]$, definimos a i-ésima função Hamiltoniana de ***(PCDM)****, por:*

$$H_i(x,u,p,\nu) = \langle p,\varphi(x,u,i)\rangle - \sum_{j=1}^{p}\langle\nu_j, f_j(x,u)\rangle$$

$$(x\in\mathbb{R}^n, u\in\mathbb{R}^m, p\in\mathbb{R}^n, \nu\in\mathbb{R}^p).$$

Para que tenhamos $\nu\neq 0$ no Teorema 3.1, é necessário alguma condição de regularidade em **(PCDM)**.

[7]**Sobre a notação:** $F_1(x,u)(i)$ denota a i-ésima componente de $F_1(x,u)\in\mathbb{R}^{n(N)}$. E similarmente para as demais F_j e também para G. Também: $g_1(x) = (g_1^1(x),\cdots,g_1^{s_1}(x))\in\mathbb{R}^{s_1}$ e analogamente para $g_2(u)\in\mathbb{R}^{s_2}$.

Definição 3.1. *Seja $(\widehat{x},\widehat{u})$ um processo admissível para* ***(PCDM)***. ***(i)*** *Dizemos que $(\widehat{x},\widehat{u})$ é um* ***processo fracamente regular*** *para* ***(PCDM)*** *se*

$$\begin{aligned} T(M_F,(\widehat{x},\widehat{u})) &= \{(w,v)\in X\times U : w_{i+1}=\varphi_x(\widehat{x}_i,\widehat{u}_i)w_i+\varphi_u(\widehat{x}_i,\widehat{u}_i)v_i,\ h_1'(\widehat{x}_i)w_i=0, \\ h_1'(\widehat{u}_i)v_i &= 0,\ K_{x_0}(\widehat{x}_0,\widehat{x}_N)w_0+K_{x_0}(\widehat{x}_0,\widehat{x}_N)w_N=0\} \end{aligned} \tag{6}$$

e existe $(\overline{w},\overline{v})\in X\times U$, tal que

$$\left.\begin{array}{l} \overline{w}_{i+1}-[\varphi_x(\widehat{x}_i,\widehat{u}_i)\overline{w}_i+\varphi_u(\widehat{x}_i,\widehat{u}_i)\overline{v}_i]=0, i\in[0,N-1]; \\ h_1'(\widehat{x}_i)\overline{w}_i=0, i\in[0,N];\ h_1'(\widehat{u}_i)\overline{v}_i=0, i\in[0,N-1]; \\ (g_1^s)'(\widehat{x}_i)\overline{w}_i<0,\ \ s\in I^1(\widehat{x},\widehat{u});\ (g_2^s)'(\widehat{u}_i)\overline{v}_i<0,\ \ s\in I^2(\widehat{x},\widehat{u}); \\ K_{x_0}(\widehat{x}_0,\widehat{x}_N)w_0+K_{x_0}(\widehat{x}_0,\widehat{x}_N)w_N=0 \end{array}\right\} \tag{7}$$

onde $I^1(\widehat{x},\widehat{u})=\{s\in\{1,\cdots,s_1\} : g_1^s(\widehat{x}_i)=0,$ para algum $i\in[0,N]\}$ e $I^2(\widehat{x},\widehat{u})=\{t\in\{1,\cdots,s_2\} : g_1^t(\widehat{u}_i)=0,$ para algum $i\in[0,N-1]\}$.

(ii) *Dizemos que $(\widehat{x},\widehat{u})$ é um* ***processo regular*** *para* ***(PCDM)*** *se vale (6) e se para cada $r\in\{1,\cdots,p\}$ existe $(\overline{w},\overline{v})\in X\times U$, tal que (7) se cumpre, e também vale*

$$\Phi_j'(\widehat{x}_i,\widehat{u}_i)\overline{w}_i<0,\ j=1,\cdots,p,\ j\neq r.$$

Como consequência da Observação 2.1 e da equivalência entre os problemas **(PCDM)** e **(POM)**, temos que $(\widehat{x},\widehat{u})$ é processo regular (fracamente regular) de **(PCDM)** se e somente se $(\widehat{x},\widehat{u})$ é ponto regular (fracamente regular) de **(POM)**. Consequentemente:

Teorema 3.2. *Seja $(\widehat{x},\widehat{u})$ um processo admissível e regular (fracamente regular) para* ***(PCDM)***. *Se $(\widehat{x},\widehat{u})$ é um processo fracamente eficiente para* ***(PCDM)***, *então existe $\lambda=(\nu,\lambda_1,\gamma^1,\gamma^2,\mu^1,\mu^2,p)\in\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{r_1(N+1)}\times\mathbb{R}^{r_2(N)}\times\mathbb{R}^{s_1(N+1)}\times\mathbb{R}^{s_2(N+1)}\times\mathbb{R}^{n(N+1)}$, satisfazendo (1)-(5), com $\nu>0$ ($\nu\geqq 0$).*[8]

4 Considerações finais

Observe que as condições de otimalidade estabelecidas pelo Princípio de Máximo Discreto (Teorema 3.1) são mais interessantes quando podemos garantir que $\nu\neq 0$. Caso contrário, o problema **(PCDM)** é irregular (ou degenerado) e as condições de primeira ordem são pouco efetivas para a determinação dos processos ótimos (fracamente eficientes). O prosseguimento natural deste trabalho é a obtenção de condições de segunda ordem, que sejam não-degeneradas. Pretendemos aplicar o conceito de 2-regularidade (veja [1]) ao problema **(PCDM)**. Outra possibilidade, é estudar a suficiência das condições de otimalidade estabelecidas pelo Princípio de Máximo Discreto, obtendo resultados semelhantes aos obtidos por Oliveira e Silva [10] para problemas de controle discreto. Desejamos, ainda, obter uma versão do Princípio de Máximo Discreto para os processos que são ótimos no sentido de Pareto (soluções eficientes) para o problema **(PCDM).**

[8]**Notação:** Seja $\nu\in\mathbb{R}^p$. **(i)** $\nu\geqq 0 \iff \nu_j\geq 0,\forall j$; **(ii)** $\nu\geq 0 \iff \nu\geqq 0$ e $\nu\neq 0$.

DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0479

Agradecimentos: *C. Isoton* foi parcialmente financiada por CAPES/ PDSE, Processo no. 99999.002413/2015-09; *M. Rojas-Medar* é financiado por FONDECYT, Projeto no. 1120260; *V. Vivanco-Orellanas* é financiada pela Universidad Católica de la Santísima Concepción, Projeto no. DIN 05/2015.

Referências

[1] A. Arutyunov. *Optimality conditions: Abnormal and degenerate problems.* Springer Science & Business Media, volume 526, 2000.

[2] V. G. Boltyanski. *Optimal control of discrete systems.* Halsted Press, 1978.

[3] Y. Censor. Pareto Optimality in Multiobjetive Problems. *Applied Mathematics and Optimization.* 4:41-59, 1977.

[4] E. Cerdá-Tena. *Optimización Dinámica.* Prentice Hall, Madrid, 2001.

[5] A. P. Chorobura. Condições de otimalidade para problemas com um e com vários objetivos: abordagem através do formalismo de Dubovitskii-Milyutin, Dissertação de Mestrado, UFPR, Curitiba, 2014.

[6] I. V. Girsanov. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems.* Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, volume 67, 1972.

[7] W. Kotarski. *On Some Specification of the Dubovitskii-Milyutin Theorem for Pareto Optimal Problems. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, volume 14, chapter 3, pages 287-291, 1990.

[8] A. Leitão e J.Baumeister. *Introdução à Teoria de Controle e Programação Dinâmica*, IMPA, Rio de Janeiro, 2008.

[9] B. Marinkovic. Optimality conditions in discrete optimal control problems with state constraints. *Numerical Functional Analysis and Optimization.* 28:945-955, 2007.

[10] V. A. Oliveira and G. N. Silva. New optimality conditions for nonsmooth control problems. *Journal of Global Optimization.* 57:1465-1484, 2013.

