Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Comparação entre Esquemas de Diferenças Finitas Compactas de Alta Ordem

Rafael L. Sterza[1]
Beatriz L. Carreira[2]
Leticia B. Berlandi[3]
Analice C. Brandi[4]
Departamento de Matemática e Computação, FCT, UNESP, Presidente Prudente, SP

1 Introdução

As equações elípticas estão relacionadas com problemas de equilíbrio que não dependem, em geral, do tempo. Como exemplos de equações elípticas têm-se problemas de vibração em membranas, problemas de difusão, entre outros [1]. Os esforços para calcular uma solução mais precisa tem dirigido a atenção dos pesquisadores para o desenvolvimento do método de diferenças finitas compactas de alta ordem que é um método conhecido por ter propriedades de alta ordem de precisão e baixo custo computacional, quando comparado com outros métodos numéricos [3]. O objetivo desse trabalho é fazer uma comparação entre o método de diferenças finitas compactas de 4ª e 6ª ordem, utilizando o método LU para a resolução do sistema linear.

2 Formulação Matemática e Numérica

Uma das principais equações elípticas que representam os problemas de equilíbrio é a equação de Poisson dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y). \tag{1}$$

As propriedades físicas desses problemas se propagam em todas as direções afetando os pontos interiores, e por este motivo suas condições de contorno normalmente são especificadas ao longo de toda fronteira [1].

A resolução da equação (1) foi realizada pelo método de diferenças finitas compactas que utiliza aproximações para as derivadas de alta ordem

$$\frac{1}{6}(U_{i-1,j} + U_{i+1,j} + U_{i,j-1} + U_{i,j+1}) + \frac{2}{3}(U_{i-1,j+1} + U_{i-1,j-1} + U_{i+1,j-1} + U_{i+1,j+1}) +$$

[1] rlsterza@gmail.com
[2] bia.liara36@hotmail.com
[3] leticia-braga-berlandi@hotmail.com
[4] analice@fct.unesp.br

$$-\frac{10}{3}U_{i,j} = -\frac{h^2}{12}(f_{i-1,j} + f_{i+1,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1} + 8f_{i,j}) + A, \quad (2)$$

onde a equação (2) representa o método de 4ª ordem se $A = 0$ e se $A = \frac{h^6}{360}(\nabla^4 f_{i,j} + 4\delta_x^2\delta_y^2 f_{i,j})$ representa o método de 6ª ordem.

3 Resultado Numérico

Considerando um problema para a equação de Poisson dada pela equação (1), com condições de contorno do tipo Dirichlet, $u(x,0) = e^x$, $u(x,1) = e^{x+1}$, $u(0,y) = e^y$, $u(1,y) = e^{1+y}$ e $f(x,y) = 2e^{x+y}$. Cuja solução analítica $u(x) = e^{x+y}$ [2], testa-se a formulação compacta de alta ordem. A análise feita será apresentada sobre o erro máximo absoluto, $E = \max\limits_{1\leq i,j\leq N-1} |u_{i,j} - U_{i,j}|$.

Tabela 1: Comparação entre os valores de E em cada método numérico.

Método utilizado \ Espaçamento	0.25	0.125	0.0625	0.003125
LU - 4ª ordem	4.5361e-6	2.8799e-7	1.8295e-8	1.1432e-9
LU - 6ª ordem	1.6667e-8	2.6701e-10	4.2486e-12	6.9278e-14

4 Conclusões

Estudando a Tabela 1, conclui-se que os métodos são eficientes por produzir baixos erros e que o refinamento de malha reduziu ainda mais o erro. Dessa forma, esses métodos produzem soluções eficientes quando muitas vezes não é possível determinar a solução analítica.

Agradecimentos

Agradecemos à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo pelo apoio financeiro no desenvolvimento deste trabalho, processo nº 2016/17849-7.

Referências

[1] A. O. Fortuna. *Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos:* conceitos básicos e aplicações. 2.ed. EDUSP, São Paulo, 2012.

[2] A. J. Harfash and H. A. Jalob. Sixth and Fourth Order Compact Finite Difference Schemes for Two and Three Dimension Poisson Equation with Two Methods to derive These Schemes, *Basrah Journal of Scienec*, 24:1-20, 2006.

[3] Okoro, F. M. Okoro and A. E. Owoloko. Compact Finite Difference scheme for Poisson equation using direct solver, *Journal of Mathematics and Technology*, 3:130-138, 2010.

