Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Problemas de Autovalor Generalizado: Desafios e Aplicação em Mecânica dos Fluidos

João V. O. Silva[1]
Juliana V. Valério [2]
João Paixão [3]
Departamento de Ciência da Computação, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ

1 Introdução

Problemas de autovalor generalizado (P.A.G.) podem ser encontrados em diversas áreas da ciência. Um em particular é o problema de estabilidade hidrodinâmica [2], que consiste em dizer se após sujeito a alguma pequena perturbação, um escoamento sofrerá uma mudança considerável no seu perfil de velocidade. O problema de autovalor generalizado aparece após uma perturbação em modos normais ser introduzida nas famosas equações de Navier-Stokes, e considerando somente os termos lineares uma discretização do problema é realizada.

Este trabalho se baseou em [2], que soluciona o problema para o escoamento de Couette (já bastante estudado na literatura por sua grande importância), discretiza o espaço e soluc iona o P.A.G. usando o algoritmo QZ, após uma determinada transformação que retira os chamados autovalores no infinito do problema e diminui razoavelmente o tamanho do mesmo. A diferença deste trabalho é o uso do iteração de Arnoldi, com uma transformação de *Shift-Invert*, semelhante à [1] para o cálculo dos autovalores do problema. As adversidades como autovalores no infinito e matrizes de grande dimensão são tratados pela segunda técnica, que transforma o problema em um de autovalor tradicional envolvendo uma matriz consideravelmente menor. Espera-se refinar esta segunda técnica, de modo que seja possível resolver problemas de grande porte (que num contexto de mecânica dos fluidos aparece em problemas bidimensionais e tridimensionais), insolúveis em tempo hábil usando o algoritmo QZ.

2 Estratégia utilizada e resultados

É possível escrever as equações de Navier-Stokes perturbadas discretizadas vetorialmente da seguinte forma:

$$J\mathbf{c} = \lambda M\mathbf{c}, \tag{1}$$

[1]jvitordeoliveira@ufrj.br
[2]juvianna@dcc.ufrj.br
[3]jpaixao@dcc.ufrj.br

onde no caso do escoamento de Couette $J, M \in \mathbb{C}^{(3N-1)\times(3N-1)}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^{(3N-1)}$ (N é o número de nós usados na discretização), em que $\mathbf{c}$ engloba o campo de velocidade e o de pressão nos nós desconhecidos e λ está associado a magnitude da perturbação: se sua parte real for maior do que 0, a perturbação cresce indefinidamente. Ambas as matrizes são esparsas, o que era de se esperar pela forma como foi realizada a discretização, J é uma matriz mal-condicionada e M é singular, motivo da presença dos autovalores no infinito. Como estes autovalores no infinito são indesejáveis (não possuem significado físico) , usou-se uma transformação de *Shift-Invert*, que valoriza uma determinada região do espectro próxima de um número arbitrário σ, e transforma o problema em um de autovalor tradicional $\boxed{B\mathbf{c} = \beta\mathbf{c}}$, onde $B = (J - \sigma M)^{-1}M$ e $\beta = (\lambda - \sigma)^{-1}$. Como a matriz B ainda permanece sendo esparsa e nem todo espectro da matriz é desejável, usa-se uma a iteração de Arnoldi para se obter estimativas dos autovalores do problema original (chamadas de *Ritz Values*). Esta iteração além de trabalhar com uma matriz H_n bem menor que a B, aproxima melhor os autovalores de maior módulo (que após o *Shift*, são justamente os de interesse).

Usando os mesmos valores de [2] para os parâmetros associados ao escoamento e a perturbação e um *shift* $\sigma = 0.1$, os resultados obtidos estão na Figura 1:

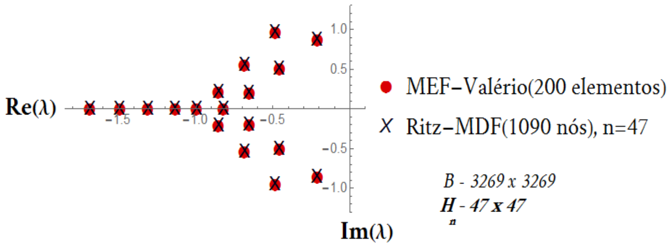

Figura 1: Resultados dos *Ritz Values* usando uma matriz 47×47, junto com os autovalores de [2]. A maior diferença é exatamente 0.000392586 (usando discretizações diferentes).

Como se pode perceber, foi possível resolver um problema usando uma matriz aproximadamente 70 vezes menor. Entretanto, foi necessário realizar um *Shift* arbitrário motivado por um conhecimento prévio do espectro. É de interesse futuramente resolver problemas mais complexos usando uma estratégia que associe as ideias de [2] e [1].

Referências

[1] Z. Jia, Y.Zhang. A refined shift-and-invert Arnoldi algorithm for large unsymmetric generalized eigenproblems. *Computers & Mathematics with Applications*, 44(8-9):1117-1127, 2002. DOI: 10.1016/S0898-1221(02)00220-1

[2] J. V. Valério, M. S. Carvalho, C. Tomei. Filtering the eigenvalues at infinity from the linear stability analysis of incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, 227(1):229–243, 2007. DOI: 10.1016/j.jcp.2007.07.017