Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

# Resolução numérica da equação do movimento de pêndulos

Aline Costa Ramos[1]
Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Alfenas, UNIFAL-MG, Alfenas, MG

## 1 Introdução

Os pêndulos são objetos físicos constituídos por massas suspensas à extremidade de fios de comprimentos fixos, que realizam movimentos oscilatórios em torno de suas posições de equilíbrio. O estudo das oscilações e a descoberta da periodicidade do movimento de pêndulos simples foi realizado por Galileu Galilei, em 1581, através da observação de um lustre da Catedral de Pisa. Essa descoberta serviu de base para a construção de relógios de pêndulos, em 1656, por Christian Huygens.

Com a invenção do cálculo diferencial e integral e o estabelecimento das leis de Newton no século XVII, foi possível realizar o estudo do movimento de pêndulos por meio de equações diferenciais. Tomando como exemplo o pêndulo simples, aplicando a segunda lei de Newton, que diz que a força resultante é igual ao produto da massa pela aceleração [2], onde a aceleração é entendida como a segunda derivada da função posição do pêndulo, em função do tempo, é possível modelar a equação do movimento desse pêndulo. Considerando $\theta = \theta(t)$ como o arco em radianos formado entre o fio que sustenta o pêndulo e o eixo central vertical ao chão, temos a seguinte equação do movimento do pêndulo

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}\sin(\theta(t)) = F(t), \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = \theta_1, \tag{1}$$

sendo $m$ a massa do pêndulo, $l$ o comprimento do fio em metros, $g$ a aceleração da gravidade em $m/s^2$, $F(t)$ a força externa e $t$ o tempo em segundos.

Como essa equação é não-linear, não podemos encontrar diretamente sua solução analítica e para obter uma boa aproximação da solução vamos utilizar os métodos numéricos de Runge-Kutta que são deduzidos através do polinômio de Taylor de ordem $n$ para $\theta(t)$ [1].

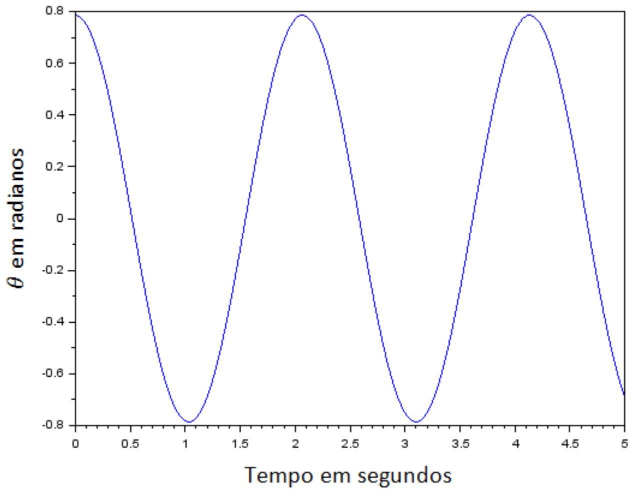
## 2 Metodologia

A metodologia do trabalho é a revisão de literatura, para tratar alguns conceitos físicos e matemáticos. Para obter uma boa aproximação da solução vamos aplicar métodos numéricos de Runge-Kutta, com implementação de algoritmos na linguagem R.

[1] alinecostaramos@hotmail.com

## 3 Resultados e Discussões

Aplicando o método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem (que é um dos mais utilizados na literatura) para a equação não-linear (1), e considerando que $g = 10\ m/s^2$, $l = 1$ metro, $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ radianos, $\theta_1 = 0$ radianos e $F(t) = 0$, obtemos uma aproximação para $\theta$ com $t$ variando de 0 a 5 $s$ e com passo ou intervalo de tempo $h = 0,01\ s$. Obtemos o gráfico a seguir, que descreve aproximadamente o movimento.




Assim, através dos métodos numéricos de Runge-Kutta podemos obter boas aproximações para a solução da equação que modela o movimento do pêndulo simples, o que possibilita a análise do seu comportamento e visualizar o movimento oscilatório. O mesmo método pode ser adaptado para aproximar a solução de outros modelos que são descritos por equações diferenciais ordinárias não-lineares, como por exemplo, modelos de pêndulos acoplados, os modelos predador-presa, modelos de epidemias e modelos massa-mola ou circuitos elétricos não lineares.

## Agradecimentos

Agradecemos à FAPEMIG pelo apoio financeiro como bolsa de IC ligada ao projeto de pesquisa CEX - APQ-01769-14, coordenado pelo professor José Claudinei Ferreira.

## Referências

[1] W. Boyce e R. C. E. Diprima. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.* 8 ed., Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 2006.

[2] D. Halliday, R. Resnick e J. Walker. *Fundamentos de física 1: mecânica.* 9 ed., LTC, Rio de Janeiro, 2012.