

ANÁLISE DA TRAJETÓRIA DE UM MÍSSIL BALÍSTICO

LUÍS OTÁVIO MARCHI, CARLOS RENATO HUAURA SOLÓRZANO

*Centro de Engenharia, Modelagem e Ciências Sociais Aplicadas, Universidade Federal do ABC
Avenida dos Estados, 5001 – Bangu - CEP 09.210-170 – Santo André – SP - Brasil
E-mails: marchi.luis@yahoo.com.br, carlos.solorzano@ufabc.edu.br*

Resumo—O Programa Espacial Brasileiro começou a ser projetado em 1961, quatro anos após o lançamento do primeiro satélite o Sputnik 1. Nesses cinquenta anos foram criados centros de pesquisas para o desenvolvimento de projetos espaciais que incluem a criação de foguetes, satélites e bases de lançamento. Hoje, várias instituições brasileiras, governamentais e privadas, desenvolvem pesquisas na área de tecnologia espacial para a produção de foguetes e mísseis. Do ponto de vista de defesa nacional existem diversas empresas voltadas a fabricação de mísseis, tais como Avibrás e Mectron (Organização Odebrecht). Desta forma a tecnologia de mísseis tem evoluído aceleradamente desde os seus inícios dado pelo primeiro foguete balístico V2. Nos dias de hoje diversos estudos são realizados voltados a trajetória, estrutura, controle, eletrônica, propulsão e guiagem de mísseis. O presente trabalho pretende abordar a análise da trajetória de um míssil balístico considerando efeitos gravitacionais e de arrasto atmosférico.

Palavras-chave—astrodinamica, trajetória, míssil balístico

1 Introdução

Do ponto de vista da defesa nacional existem algumas empresas voltadas a produção de produtos bélicos. A Avibras Indústria Aeroespacial e a Mectron (Organização Odebrecht) atuam no desenvolvimento e fabricação de produtos de alta tecnologia e valor agregado, tanto para uso civil como militar. Trata-se de sistemas complexos como armamentos inteligentes, sistemas aviônicos, radares, equipamentos para satélites entre outros componentes que exigem capacitações técnicas nas mais diversas áreas da engenharia. É nítido o interesse do governo brasileiro em manter em pleno funcionamento as empresas especializadas em produtos bélicos, pois os mercados internacionais globalizados podem transformar-se em mercados consumidores fortalecendo as exportações.

Além disso, este tipo de tecnologia possibilitaria um alto poder de dissuasão às ações internacionais comprometedoras a integridade nacional que, por ventura, estivessem a fim de usufruir dos recursos naturais recentemente descobertos e atualmente cobichados devido ao alto valor econômico agregado.

2 Modelos Matemáticos

A trajetória de um míssil balístico é composta basicamente de três etapas na qual a primeira delas é o voo propulsionado que se refere desde o momento de lançamento até o corte de empuxo no ponto final de queima, a segunda etapa é composta pelo período de voo livre que constitui a maior parte da trajetória e, a reentrada, que começa em um ponto indefinido da atmosfera na qual a força de arrasto deve ser levada em consideração, até o ponto de impacto. Sabe-se que a energia é continuamente adicionada ao míssil durante a fase de voo propulsionado, o que impossibilita o uso da mecânica de 2 corpos para determinar o caminho entre o lançamento até o ponto final de queima. A trajetória do míssil nesta parte crítica de voo é determinada pelo sistema de guiagem e nave-

gação que a princípio não pertence ao escopo desta pesquisa. Em contrapartida, no voo livre a trajetória é parte de uma órbita cônica – quase sempre uma elipse – que podemos analisar usando os princípios da mecânica envolvendo 2 corpos. Na reentrada existe a dissipação de energia por atrito com a atmosfera.

As hipóteses iniciais a serem assumidas são basicamente: planeta Terra como irrotacional (ausência de Rotação), altitudes de ponto final de queima e reentrada iguais.

A formulação matemática inicia-se com a definição de um parâmetro adimensional, Q , expresso em função do parâmetro gravitacional, μ , como:

$$Q \equiv \frac{v^2 r}{GM_{terra}} = \frac{v^2 r}{\mu} \quad (1)$$

- $G = 6,67384 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg s}^2)$ e $M_{terra} = 5,972 \times 10^{24} \text{ kg}$.

Na Figura 1 é possível identificar a geometria da trajetória e as variáveis de interesse para realização dos cálculos (Bate et al. 1971).

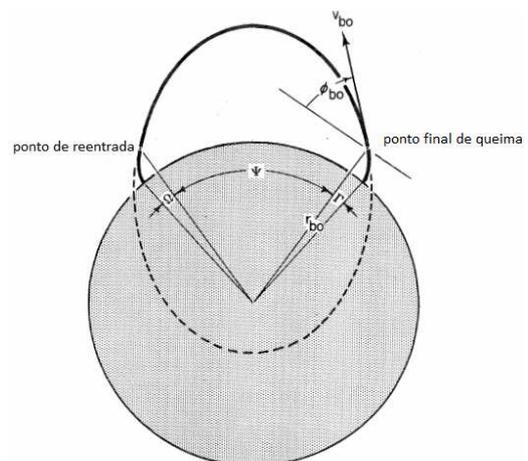


Figura 1. Geometria da trajetória de um míssil balístico.

Os parâmetros são:

Γ - ângulo de alcance de voo propulsionado;

Ψ - ângulo do alcance de voo livre;

Ω - ângulo do alcance de reentrada;

Λ - ângulo de alcance total ($\Gamma + \Psi + \Omega$);

v_{bo} - velocidade no ponto final de queima;

r_{bo} - distância entre o centro da Terra ao ponto final de queima;

Φ_{bo} - ângulo de caminho de voo no ponto final de queima;

Visto que a trajetória de voo livre de um míssil é uma seção cônica, a equação geral das cônicas pode ser aplicada no ponto final de queima.

$$r_{bo} = \frac{p}{1 + e \cos(\Phi_{bo})} \quad (2)$$

- e : excentricidade da trajetória;
- p : semilatus rectum;
- Φ_{bo} : anomalia verdadeira no ponto final de queima;

Ao isolar $\cos(\Phi_{bo})$, obtém-se:

$$\cos(\Phi_{bo}) = \frac{p - r_{bo}}{er_{bo}} \quad (3)$$

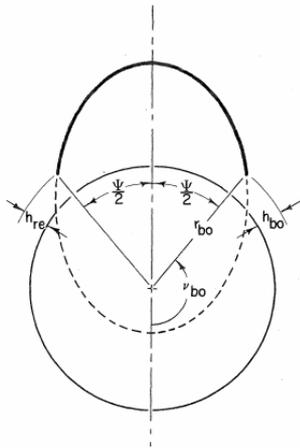


Figura 2. Trajetória Simétrica.

- h_{bo} : altitude do burnout;
- h_{re} : altitude de re-entrada;

Ao assumir que a trajetória de voo livre deve ser simétrica ($h_{bo} = h_{re}$), metade do ângulo de alcance de voo livre, ψ , encontra-se em cada lado do semi-eixo maior.

$$\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) = -\cos(\Phi_{bo}) \quad (4)$$

Portanto, a Eq. (3) pode ser reescrita como:

$$\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) = \frac{r_{bo} - p}{er_{bo}} \quad (5)$$

Esta última expressão para o ângulo de alcance de voo livre esta em função de p , e , r_{bo} . Porém, $p = h^2/\mu$ e $h = rvcos\Phi$ (h : momento angular). Ao utilizar a definição de Q (Eq. 1) chega-se:

$$p = \frac{r^2 v^2 \cos^2 \phi}{\mu} = rQ \cos^2 \phi \quad (6)$$

Agora, uma vez que, $p = a(1 - e^2)$, então:

$$e^2 = 1 - \frac{p}{a} \quad (7)$$

Ao substituir $p = rQ \cos^2 \Phi$ e $a = r/(2 - Q)$, tem-se:

$$e^2 = 1 + Q(Q - 2) \cos^2(\phi) \quad (8)$$

Se substituirmos as Eq. (6) e (8) na Eq. (5) teremos uma nova forma de expressar a equação de alcance de voo livre para as condições expressas no ponto final de queima.

$$\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) = \frac{1 - Q_{bo} \cos^2 \phi_{bo}}{\sqrt{(1 + Q_{bo}(Q_{bo} - 2) \cos^2 Q_{bo})}} \quad (9)$$

Na Figura 3 nós temos o desenho do horizonte local bem como a tangente e a normal no ponto de burnout. A linha do ponto de burnout ao foco secundário, F' , é chamada r'_{bo} .

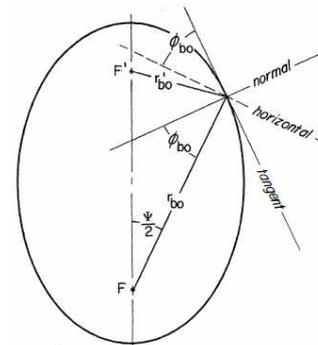


Figura 3. Geometria da elipse.

O ângulo entre o horizonte local e a tangente (direção de v_{bo}) é o ângulo de caminho de voo, Φ_{bo} . Uma vez que r_{bo} é perpendicular ao horizonte local e a normal é perpendicular a tangente, o ângulo entre r_{bo} e a normal também será Φ_{bo} . Depois de algum algebrismo é possível provar que o ângulo entre r_{bo} e r'_{bo} é $2\Phi_{bo}$. Agora, basta se concentrar no triângulo formado por F , F' e o ponto de burnout. É conhecido dois ângulos deste triângulo e o terceiro pode ser determinado pelo simples fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

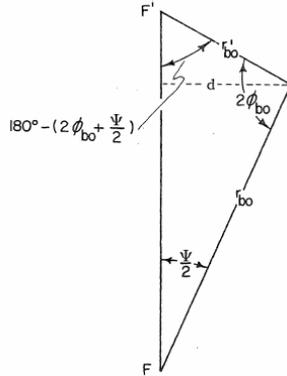


Figura 4. Triângulo formado pelos focos e o ponto final de queima.

Ao dividir este triângulo em dois triângulos retângulos por uma linha tracejada, d , como mostrado na Figura 4, pode-se expressar d , como:

$$d = r_{bo} \text{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) \quad (10)$$

ou ainda:

$$d = r'_{bo} \text{sen}\left[180^\circ - \left(2\phi_{bo} + \frac{\psi}{2}\right)\right] \quad (11)$$

Ao combinar as Eqs. (10) e (11) e lembrando que $\text{sen}(180^\circ - x) = \text{sen}(x)$:

$$\text{sen}\left(2\phi_{bo} + \frac{\psi}{2}\right) = \frac{r_{bo}}{r'_{bo}} \text{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) \quad (12)$$

Contudo, $r_{bo} = a(2 - Q_{bo})$ e $r_{bo} + r'_{bo} = 2a$, o que possibilita chegar na equação de ângulo de caminho de voo.

$$\text{sen}\left(2\phi_{bo} + \frac{\psi}{2}\right) = \frac{2 - Q_{bo}}{Q_{bo}} \text{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) \quad (13)$$

Ao derivar parcialmente a Eq. (13) em relação à Φ_{bo} e após isolar $\partial\psi/\partial\Phi_{bo}$, chega-se em:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\phi_{bo}} = \frac{-4\cos\left(2\phi_{bo} + \frac{\psi}{2}\right)}{\cos\left(2\phi_{bo} + \frac{\psi}{2}\right) - \left(\frac{2 - Q_{bo}}{Q_{bo}}\right)\cos\left(\frac{\psi}{2}\right)} \quad (14)$$

Agora, basta igualar a Eq. (14) à zero. Deste modo determina-se Φ_{bo} como sendo:

$$\phi_{bo} = \frac{1}{4}(\pi - \psi) \quad (15)$$

ou seja,

$$2\phi_{bo} + \frac{\psi}{2} = \frac{\pi}{2} \quad (16)$$

Ao substituir a equação (16) na Eq. (13) e isolando Q_{bo} :

$$Q_{bo} = \frac{2\text{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right)}{1 + \text{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right)} \quad (17)$$

Esta equação é útil para determinar o menor valor de Q_{bo} que irá atingir um determinado ângulo ψ .

Por simetria, visualiza-se através da Figura 5, que o tempo de voo do ponto final de queima para o ponto de reentrada é duas vezes o tempo de voo do ponto final de queima (ponto1) para o apogeu (ponto2).

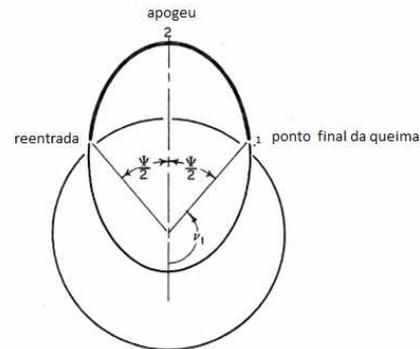


Figura 5. Tempo de voo livre.

A anomalia excêntrica no ponto 2 é π radianos ou 180° . Em relação ao ponto 1 a anomalia pode ser computada notando que $v_1 = 180^\circ - (\psi/2)$.

$$\cos(E_1) = \frac{e - \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)}{1 - e\cos\left(\frac{\psi}{2}\right)} \quad (18)$$

Com isso, é possível expressar o tempo de voo livre em função do semi-eixo maior (a), parâmetro

gravitacional (μ) e anomalia excêntrica no ponto 1 (E_1).

$$t_{ff} = 2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(\pi - E_1 + e \operatorname{sen} E_1) \quad (19)$$

Existem dois modelos físicos (Zarchan, 1997) que levam em consideração à influência gravitacional e que podem ser utilizados no estudo de trajetórias balísticas. O mais simples deles é conhecido como Modelo Terra Plana o qual a aceleração da gravidade é considerada constante independentemente da altitude. Assim, sua validade se restringe apenas a pequenas altitudes uma vez que a influência gravitacional sobre o corpo diminui com a altitude. Já o segundo modelo baseia-se na equação do problema de dois corpos o qual leva em consideração a variação da gravidade com a altitude.

Além do gradiente gravitacional o efeito do arrasto atmosférico também deve ser levado em consideração. Apesar de mísseis balísticos de longo alcance ficarem a maior parte do tempo na condição de voo livre (atmosfera rarefeita), na fase de voo propulsionado (ponto de lançamento ao ponto final de queima) e na fase de reentrada (altitude de reentrada até o impacto com o alvo) há a presença da resistência atmosférica que leva a diminuir a capacidade de alcance. À vista disso, é necessário inserirmos nos cálculos a força de arrasto sendo dada como:

$$F_{arrasto} = QS_{ref}C_{D0} \quad (20)$$

- Q : pressão dinâmica;
- S_{ref} : área de referência;
- C_{D0} : coeficiente de arrasto quando a sustentação aerodinâmica é nula;

A pressão dinâmica é função da densidade do ar ρ e da velocidade do míssil V , portanto:

$$Q = \frac{\rho V^2}{2} \quad (21)$$

A área de referência relaciona-se à seção transversal do corpo do míssil e, por esse motivo, está associada com suas características físicas. Já o coeficiente de arrasto é função da velocidade e forma aerodinâmica do míssil.

Como a densidade do ar diminui com a altitude, a influência do arrasto é muito maior a baixas altitudes.

O Padrão Atmosférico Norte Americano contém uma série de modelos que definem valores para a temperatura atmosférica, pressão, densidade e outras propriedades que variam ao longo de uma ampla faixa de altitude. O primeiro modelo foi publicado em 1958 e foi atualizado em 1962, 1966 e 1976. Em primeira análise a aproximação exponencial de 1962 oferece boa precisão para os cálculos da densidade.

$$\rho = 0.002378e^{(-alt/9144)} \quad \text{se } alt < 9144\text{m} \quad (22)$$

$$\rho = 0.0034e^{(-alt/6706)} \quad \text{se } alt \geq 9144\text{m} \quad (23)$$

- alt : altitude a qual se encontra o míssil;

Portanto, é importante observar que a magnitude da desaceleração devido ao arrasto é influenciada por C_{D0} e a altitude. Desta maneira, é conveniente combinar o peso total (W), S_{ref} e C_{D0} em uma única expressão denominada coeficiente balístico (β).

$$\beta = \frac{W}{C_{D0}S_{ref}} \quad (24)$$

As equações diferenciais agindo no míssil são:

$$\dot{V}_x = -a_{arrasto} \cos(\phi) \quad (25)$$

$$\dot{V}_y = -g - a_{arrasto} \operatorname{sen}(\phi) \quad (26)$$

$$\dot{R}_x = V_x \quad (27)$$

$$\dot{R}_y = V_y \quad (28)$$

- V : velocidade do míssil;
- R : alcance do míssil;

As condições iniciais para velocidade e posição são dadas por:

$$V_x(0) = V \cos(\phi) \quad (29)$$

$$V_y(0) = V \operatorname{sen}(\phi) \quad (30)$$

$$R_x(0) = dr \quad (31)$$

$$R_y(0) = alt \quad (32)$$

Por fim, o módulo da aceleração devido ao arrasto atmosférico pode ser escrito como sendo:

$$a_{arrasto} = \frac{Qg}{\beta} = \frac{1}{2} \rho V^2 C_{D0} \frac{S}{m} \quad (33)$$

3 Resultados

É possível expressar graficamente cinco parâmetros de interesse (Q , e , ψ , Φ e t_{ff}/P_{cs}) onde P_{cs} é o período circular calculado na altitude do burnout como:

$$P_{cs} = 2\pi \sqrt{\frac{r_{bo}^3}{\mu}} \quad (34)$$

A lógica de programação exige a obtenção de equações na qual todos os parâmetros, cujas curvas serão geradas, devem ser expressos em função de outro parâmetro constante e de ψ . Em poucas palavras, se Φ é constante, Q pode ser escrito em função do próprio Φ e da variável de interesse ψ . O mesmo raciocínio foi utilizado em relação aos demais parâmetros conforme o esquema abaixo.

1º caso: $\phi = const. \rightarrow Q(\phi, \psi)$

$$Q = \frac{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(2\phi + \frac{\psi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right)} \quad (35)$$

2º caso $Q = const. \rightarrow \phi(Q, \psi)$

$$\phi = \frac{\operatorname{asen}\left(\frac{2-Q}{Q} \operatorname{sen}\frac{\psi}{2}\right)}{2} - \frac{\psi}{4} \quad (36)$$

3º caso $e = const. \rightarrow Q(e, \psi)$

$$Q = \frac{-e^2 - 1 + 2e \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)}{e \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) - 1} \quad (37)$$

A Figura 5 contém o tempo de voo versus o ângulo de alcance para diversos valores de excentricidade (e), parâmetro adimensional (Q) e ângulo caminho de voo (Φ).

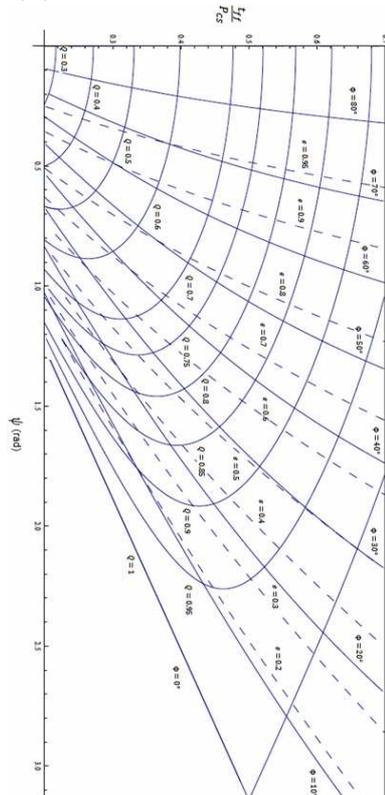


Figura 5. Tempo de voo vs ângulo de alcance.

Ao inserir a componente de arrasto nas equações do Modelo Terra Plana (ver Eq. 25 a 28) o alcance e altitude sofrem brusca variação. A Figura 8 contém os resultados para um lançamento efetuado ao nível do mar com velocidade inicial $V_0 = 1\text{km/s}$ e $\Phi = 45^\circ$.

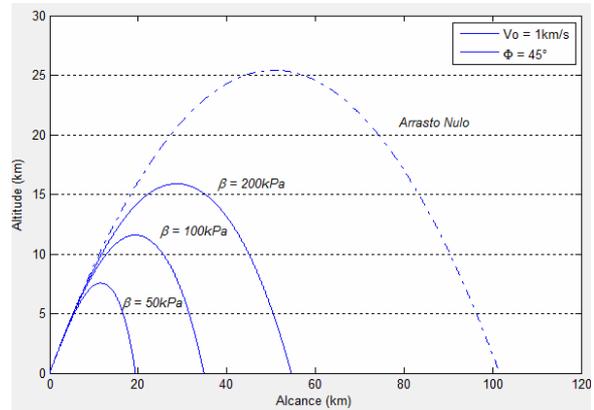


Figura 8. Efeito do arrasto para lançamento ao nível do mar.

A influência do coeficiente balístico no alcance ao decorrer do tempo encontra-se na figura 9. Quanto menor o coeficiente balístico menor será a capacidade de alcance.

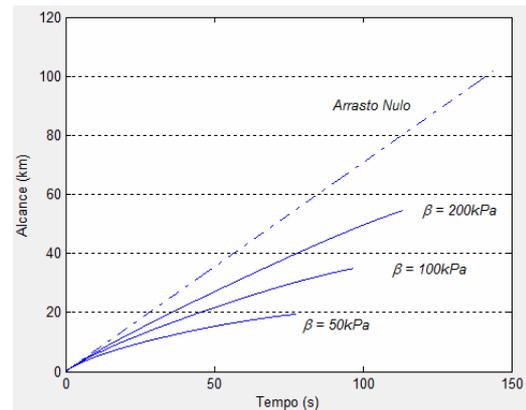


Figura 9. Alcance vs tempo para lançamento ao nível do mar.

A variação do valor absoluto da velocidade do míssil no decorrer do tempo encontra-se na figura 10. Novamente, quanto menor for o coeficiente balístico mais acentuada será a queda na velocidade.

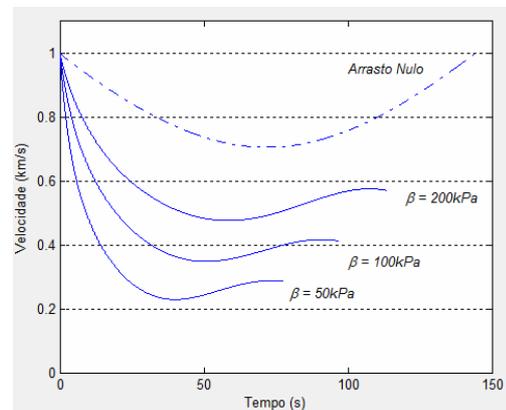


Figura 10. Velocidade vs tempo para lançamento ao nível do mar.

Nota-se através da Figura 11 que o efeito do arrasto é reduzido consideravelmente para elevadas altitudes de lançamento. De maneira específica, os resultados das figuras 11, 12 e 13 foram obtidos para as condições de $V_0 = 1\text{km/s}$, $\Phi = 45^\circ$ e lançamento a 5km de altitude.

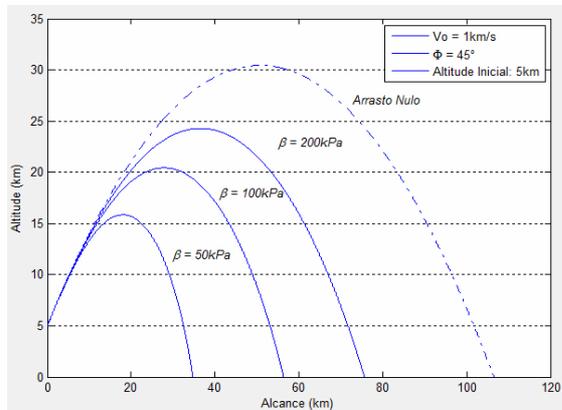


Figura 11. Redução do efeito do arrasto para lançamento a 5km de altitude.

Na Figura 12, bem como para a Figura 9, nota-se que a relação entre o alcance e o tempo de voo deixa de ser linear conforme diminuímos o coeficiente balístico.

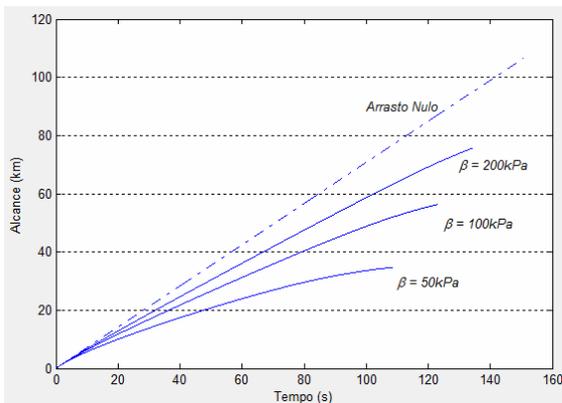


Figura 12. Alcance vs tempo para lançamento a 5km de altitude.

A variação do valor absoluto da velocidade do míssil no decorrer do tempo encontra-se na Figura 13.

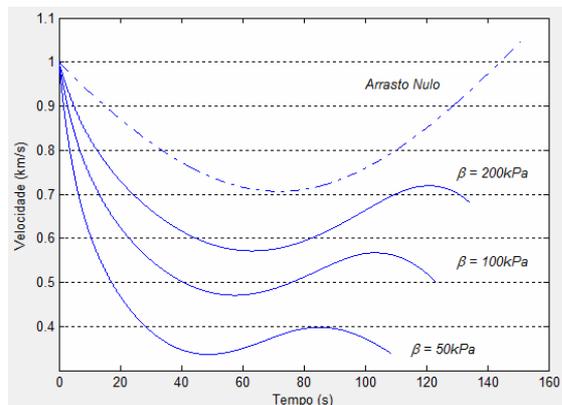


Figura 13. Velocidade vs tempo para lançamento a 5km de altitude.

4 Conclusão

Através das simulações realizadas no presente trabalho fica evidente o efeito do arrasto atmosférico na trajetória balística do míssil. Deste modo quando maior for o β menor será a influencia do arrasto. Além disso, o aumento na altitude da posição de lançamento tende a diminuir também os efeitos do arrasto na trajetória do míssil.

Agradecimentos

A Deus sobre todas as coisas. À minha família pelo apoio e motivação. Ao CNPq pela bolsa de pesquisa. A todos que de alguma maneira sempre me apoiaram.

Referências Bibliográficas

- Bate, R.R; Muller, D.D; White, J. E.; “Fundamentals of Astrodynamics”, Dover Publications, Nova York, 1971
- Zarchan, P.; “Tactical and Strategic Missile Guidance”, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Virginia, 1997