Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Comparativo dos Métodos de Euler e Heun na resolução de equações diferenciais de primeira ordem

Pedro Thiago Vilela de Mendonça[1]
Diego Zacarias Santos de Lima[2]
Gabriel Gomes de Barros[3]
Matheus da Silva Menezes[4]
Ivan Mezzomo[5]
Departamento de Ciências Exatas, Tecnológicas e Humanas, UFERSA, Campus Angicos, RN

Muitos fenômenos da natureza podem ser moldados através de equações diferenciais, ou seja, envolvendo uma função desconhecida e suas derivadas [1]. Uma forma muito comum são as equações diferenciais ordinárias (EDO), que abrangem derivadas de ordem n em função de uma única variável. A solução de uma EDO gera uma família de curvas que podem ser especificadas através de um problema de valor inicial (PVI) que reduz a solução geral a uma solução particular. Este trabalho tem como objetivo, avaliar comparativamente a precisão da utilização dos métodos de Euler e de Heun, que é uma modificação do método de Euler [2] na resolução de EDOs de primeira ordem, com a análise do erro relativo.

Segundo [4], o método numérico de Euler trabalha com equações diferenciais ordinárias de primeira ordem com PVI conhecido e gera uma solução aproximada. Esse método parte de um ponto inicial e projeta um segundo ponto através da reta tangente. A expressão geral é dada por:

$$f(t_{i+1}) = f(t_i) + h * \varphi$$

onde, h é o passo de um ponto a outro e φ é a inclinação da função no ponto inicial do intervalo (t_i, y_i), ou seja, $\varphi = f(t_i, y_i)$, com $i = 1, \ldots, n$.

Aplicando esse método, encontraremos um valor numérico aproximado para $f(t_{i+1})$ que implica em um erro em relação ao valor real de $f(t_{i+1})$. De acordo com a expressão geral, para projetar um ponto precisamos das coordenadas do ponto anterior, desta forma, a taxa de erro tende a aumentar de um ponto para outro, principalmente ao analisarmos intervalos de grande amplitude.

De acordo com [3], outra fonte fundamental de erro no método de Euler é considerar que a derivada do início do intervalo pode ser usada em todo o intervalo. O método de Heun apresenta uma estratégia para melhorar a estimativa da inclinação, que envolve a

[1] pvthiago@hotmail.com
[2] diego.z.s.de.lima@gmail.com
[3] gabriel_gomesggb@gmail.com
[4] matheus@ufersa.edu.br
[5] imezzomo@ufersa.edu.br

utilização de duas derivadas, uma no ponto inicial e outra no ponto final, para obter uma aproximação mais razoável em relação ao valor real. Como o método de Heun trabalha com duas inclinações utilizamos o valor médio entre elas, logo:

$$\varphi = \frac{f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})}{2}.$$

Problema: Vamos fazer um comparativo com as funções $y' = y - t^2 + 1$ e $y' = t - y + 2$ com os parâmetros indicados na tabela, de modo a analisar o erro relativo produzido ao aplicarmos o método de Euler e método de Heun em relação a resolução analítica:

Tabela 1: [2] Parâmetros: $y' = y - t^2 + 1$, $y(0) = 0,5$; $I = [0,2]$; $h = 0,5$:

Variável t	Sol. Real	Sol. Euler	Erro Euler (%)	Sol. Heun	Erro Heun (%)
0,0	0,5	0,5	0,0	0,5	0,0
0,5	1,4256	1,25	12,32	1,375	3,552
1,0	2,6409	2,25	14,8005	2,5156	4,7422
1,5	4,0092	3,375	15,8177	3,7754	5,8308
2,0	5,3055	4,4375	16,3599	4,9163	7,3361

Tabela 2: [1] Parâmetros: $y' = t - y + 2$, $y(0) = 2$; $I = [0,1]$; $h = 0,2$:

Variável t	Sol. Real	Sol. Euler	Erro Euler (%)	Sol. Heun	Erro Heun (%)
0,0	2,0	2,0	0,0	2,0	0,0
0,2	2,0187	2,0	0,978	2,02	0,0629
0,4	2,0703	2,04	1,4645	2,0724	0,1005
0,6	2,01488	2,1100	1,7131	2,1514	0,119
0,8	2,2493	2,2096	1,7663	2,2521	0,1242
1,0	2,3679	2,3277	1,6977	2,3707	0,1208

Conforme podemos observar nas tabelas 1 e 2, nos dois problemas, o método de Heun obteve um erro relativo menor comparado com o método de Euler, tendo em vista que o primeiro trabalha com uma inclinação φ mais próxima da desejada, tornando esta uma abordagem do tipo preditor-corretor, diferente do método de Euler padrão [3].

Referências

[1] L.C. Barroso, M.M.A. Barroso, F.F. Campos Filho, M.L.B. Carvalho, M.L. Maia. *Cálculo Numérico (com aplicações)*. 2 ed., São Paulo, Harbra, 1987.

[2] R.L. Burden, J.D. Faires. *Análise Numérica*. São Paulo, Cengage Learning, 2013.

[3] S. Chapra. *Métodos Numéricos Aplicados com MATLAB para Engenheiros e Cientistas*. 3 ed., Porto Algre, Bookman, 2013.

[4] D.G. Zill, M.R. Cullen. *Equações Diferenciais*. 3 ed., São Paulo, Pearson, 2001.