Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Fundamentos Matemáticos da Programação Linear

André Matos de Souza[1]
Instituto de Ciências Exatas, Métodos Numéricos e Otimização, UFAM, Manaus, AM
Flávia Morgana de Oliveira Jacinto[2]
Instituto de Ciências Exatas, Métodos Numéricos e Otimização, UFAM, Manaus, AM

1 Introdução

A programação linear é uma área da matemática aplicada que visa encontrar a melhor solução para problemas reais cujos modelos são representados por expressões lineares e que são comumente chamados de problemas de programação linear (PPL). Tais problemas consistem em maximizar ou minimizar uma função linear, denominada função objetivo, respeitando-se um conjunto de igualdades ou desigualdades que recebem o nome de restrições do modelo, que determinam uma região viável, onde será obtida, caso exista, a melhor das soluções viáveis do problema, ou seja, a solução ótima do PPL.

Para a resolução de um PPL os dois passos fundamentais são a modelagem correta do problema e depois a escolha do método de resolução mais adequado para o problema. Depois de modeladas corretamente, as partes do PPL têm uma forma particular (ver [2]):

$$\left\{\begin{array}{lcl} \min Q(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \min Q(x) = c^T x \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \ (i = 1, 2, \ldots, m) & ou & Ax \leq b \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n) & & x \geq 0 \end{array}\right. \tag{1}$$

Onde a função objetivo é uma função polinomial $Q(x)$, cujo vetor $c^T = (c_1 \ \ c_2 \ \ \ldots \ \ c_n)$ é o vetor que pode representar o lucro ou produção(maximizar), ou os gastos(minimizar) na fabricação de um determinado produto. As restrições também são lineares, onde as de não negatividade são usadas por estarmos tratando de situações aplicáveis à vida real onde valores negativos não são interessantes.

Quando o PPL tem apenas duas variáveis existe um método bem simples de resolução, que é o Método Gráfico (ver [1]), o qual consiste em visualizar as restrições do PPL no plano cartesiano e, a partir do gradiente da função objetivo, buscar a melhor solução.

Para problemas com três ou mais variáveis, o método Simplex aparece como a melhor opção. Sendo bastante eficiente na prática. Porém essa eficiência nunca foi provada teoricamente e em 1972 Victor Klee e George J. Minty apresentaram um problema que mostrava a ineficiência teórica deste método. Assim começou a busca por um método

[1]andrematos11@hotmail.com
[2]flavia.jacinto@gmail.com

que realmente tivesse complexidade polinomial. Em 1979, Leonid Khachian respondeu a esta questão com a publicação do primeiro algoritmo polinomial para resolver um PPL, conhecido como o Método de Elipsoides, que apesar de sua grande importância teórica, uma vez que pode ser usado tanto para verificar a existência de soluções para um PPL quanto para encontrar a solução ótima de um PPL, se mostrou ineficaz na prática.

2 A matemática dos Métodos Simplex e de Elipsoides

Neste trabalho mostramos que o Método Simplex atua num PPL tornando o conjunto de soluções viáveis em um conjunto poliédrico, associando as bases de variáveis aos vértices deste poliedro, percorrendo os seus vértices buscando a melhor solução. O método se baseia em conceitos teóricos de Álgebra Linear e do trato matemático das funções do modelo para a obtenção da solução ótima seguindo basicamente 4 passos (ver [4]): 1-encontrar uma solução viável inicial formada por $r \leq n$ variáveis do problema e com elas formar uma base; 2-quando possível, encontrar uma solução melhor que será determinada por uma nova variável entrando na base formada; 3-atribuição de valores às variáveis do problema de modo a determinar a nova variável que entra na base e a variável a ser retirada da base; 4-pivoteamento da base após a alteração nas variáveis. Já para o Método de Elipsoides (ver [3]), mostramos que ele aproxima o conjunto de soluções viáveis por elipsoides verificando assim a existência de soluções, utilizando a convexidade (ver [5]), ou buscando a solução ótima do PPL com auxílio da teoria de dualidade.

Agradecimentos

Agradecemos à UFAM pela passagem aérea para apresentar neste congresso, o projeto de IC que ganhou o prêmio Professor Abraham Moysés Cohen durante o XXV CONIC de 2016. E aos colegas discentes e docentes do Departamento de Matemática da UFAM que ajudaram direta ou indiretamente na realização deste projeto.

Referências

[1] J. L. Boldrini, S. I. R. Costa, V. R. Ribeiro, e H. G. Wetzler. *Álgebra Linear e Aplicações*. Harper-Row, São Paulo, 1987.

[2] P. F. Bregalda, A. A. F. de Oliveira e C. T. Bornstein. *Introdução à Programação Linear*. 3.ed, Editora Campus Rio de Janeiro, 1988.

[3] M. Grötschel, L. Lovasz and A. Schrijver. Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization. In *Algorithms and Combinatorics*. Springer-Verlag, 1993. ISSN: 0937-5511.

[4] N. Maculan, e M. H. C. Fampa. *Otimização Linear*. UnB, Brasília, 2006.

[5] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton University Press, New Jersey, 1970.