Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estudo Preliminar de Algumas Normas Matriciais, Condicionamento de Matrizes e Sensibilidade

Fernando H. N. Amaral[1]
Ivan Mezzomo[2]
Matheus da Silva Menezes[3]
Junior C. de Paula[4]
Marcelo Nunes Silva[5]
Centro de Ciências Exatas e Naturais, UFERSA, Mossoró, RN

Este trabalho foca na importância de algumas normas matriciais na análise de problemas de sistemas de equações lineares. A norma é o comprimento de um vetor com número real não negativo e é representado por $||\vec{v}||$. No espaço bidimensional podemos obter a norma de um vetor $\vec{v} = (v_1, v_2)$ pelo teorema de Pitágoras, que é dado por: $||\vec{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$. Como o conceito de norma vetorial pode ser estendido para matrizes, então as normas matriciais representam a magnitude de uma matriz, assim como as normas vetoriais representam magnitudes para vetores. Uma norma $||.||$ do espaço vetorial das matrizes $n \times n$ é uma função que associa a cada matriz um número real não negativo que satisfaz as seguintes propriedades: Seja α qualquer escalar, A e B matrizes quadradas:
(i) $||A|| \geq 0$ e $||A|| = 0$ se e somente se $A = 0$;
(ii) $||\alpha A|| = |\alpha|.||A||$;
(iii) $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$.

As normas matriciais que iremos estudar neste trabalho são: Norma de soma máxima de coluna ou norma 1: $||A||_1 = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$, Norma de soma máxima de linha ou norma infinito: $||A||_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ e Norma de Frobenius: $||A||_F = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$.

Segundo [3], uma norma matricial $||A||$ está associada a uma norma vetorial $||\vec{v}||$ se ela for definida por: $||A|| = \max\limits_{\vec{v} \neq 0} \dfrac{||A\vec{v}||}{||\vec{v}||}$, e a chamamos de norma matricial subordinada. As normas matriciais subordinadas também devem satisfazer as propriedades de normas matriciais.

De acordo com [3], uma norma matricial $||A||$ é dita compatível com uma norma vetorial $||\vec{v}||$ se, para qualquer matriz A e vetor $\vec{v}$, temos que $||A\vec{v}|| \leq ||A||||\vec{v}||$. Uma norma

[1]fernandofhna@hotmail.com
[2]imezzomo@ufersa.edu.br
[3]matheus@ufersa.edu.br
[4]junior.c9@hotmail.com
[5]marcelonunes.genoa@gmail.com

matricial compatível $||A||$ é dita subordinada a uma norma vetorial $||\vec{v}||$, se para qualquer matriz A, existir um vetor $\vec{v}$, $\vec{v} \neq 0$, tal que $||A\vec{v}|| = ||A||||\vec{v}||$. Se a norma matricial for subordinada então ela é compatível, no entanto, a recíproca não é verdadeira.

Na resolução de sistemas de equações lineares é necessário analisar se a solução é muito sensível a pequenas mudanças nos coeficientes. A sensibilidade de uma matriz está ligada diretamente ao seu condicionamento.

Segundo [3], o número de condição de uma matriz quadrada não singular A é utilizada para medir o quanto ela é mal condicionada. O condicionamento de uma matriz A é dado por $cond(A) = ||A||||A^{-1}||$. Assim, o valor do condicionamento depende da norma que será utilizada. Como o custo computacional para calcular a matriz inversa pode ser elevado, surge a necessidade de utilizar uma definição alternativa para calcular o número de condicionamento de uma matriz A, dado por: $cond(A) = \frac{\max\left\{\frac{||A\vec{v}||}{||\vec{v}||} : \vec{v} \neq 0\right\}}{\min\left\{\frac{||A\vec{v}||}{||\vec{v}||} : \vec{v} \neq 0\right\}}$.

Definição 1 [3]: *Uma matriz A é dita mal condicionada se mudanças relativamente pequenas nos elementos de A causam erros relativamente grandes nas soluções de $A\vec{v} = b$. Caso contrário, A é dita bem condicionada.*

Segundo [2], dado um sistema de equação linear $A\vec{v} = b$ com uma pequena perturbação δb em b. A mudança $\delta\vec{v}$ na solução $\vec{v} = A^{-1}b$ satisfaz $\delta\vec{v} = A^{-1}\delta b$. Então temos que $||b|| \leq ||A||||\vec{v}||$ e $||\delta\vec{v}|| \leq ||A^{-1}||||\delta b||$. Assim, a sensibilidade de uma matriz é definida por $\frac{||\delta\vec{v}||}{||\vec{v}||} \leq ||A||||A^{-1}||\frac{||\delta b||}{||b||}$. Devido à perturbação ocorrida em δb, a equação nos fornece um limite superior para o erro relativo na solução $\vec{v}$. Ainda de acordo com [2], quanto mais mal condicionado um sistema for, maior será a influência da perturbação na solução.

Exemplo 1: Seja o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 3x_2 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & = & 2 \end{cases}$$

Uma solução para o sistema é dada por $\vec{v} = (1,1)^t$ e $cond_1(A) = 20$. Considere a seguinte perturbação $\delta b = (0.6, 0.2)^t$. Como $\vec{v} = (1,1)^t$, temos $||b||_1 = 7$ e $||\delta b||_1 = 0.8$. Assim, erro relativo da norma 1 é $\frac{||\delta x||_1}{||x||_1} \leq 20.\frac{0.8}{5} = 3.2$. De fato, com a perturbação δb, a solução $\vec{v}$ variou de $(1,1)^t$ para $(1,1.2)^t$, i.e., $\delta x = (1-1, 1.2-1)^t = (0, 0.2)^t$, e $||\delta x||_1 = 0.2$. Assim o erro relativo cometido foi de $\frac{||\delta x||_1}{||x||_1} = \frac{0.2}{1} = 0.2$, que está dentro do limite previsto de 3.2. Analogamente, podemos calcular as normas ∞ e de Frobenius. Podemos também verificar a sensibilidade do sistema fazendo uma perturbação na matriz A, porém, esse assunto será abordado num trabalho futuro.

Referências

[1] F. H. N Amaral, Revisão Bibliográfica sobre Algumas Normas Matriciais, Condicionamento de Matrizes e Sensibilidade - TCC, UFERSA (2013).

[2] F. F. Campos Filho. *Algoritmos Numéricos.* 2 ed., LTC, Rio de Janeiro, 2010.

[3] S. Leon. *Álgebra linear com aplicações.* LCT, Rio de Janeiro, 2008.