

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

---

## Desempenho de métodos numéricos para o modelo de mistura completa em reatores anaeróbios

Fernando Augusto Brancher<sup>1</sup>

Curso de Matemática, UFFS, Chapecó, SC

Pedro Augusto Pereira Borges<sup>2</sup>

Curso de Matemática, UFFS, Chapecó, SC

### 1 Introdução

O problema do presente trabalho é a determinação do método com melhor tempo de execução, entre cinco métodos numéricos utilizados para a resolução do modelo de mistura completa em reatores anaeróbios operados em batelada, para posterior uso em um problema inverso. As seguintes etapas foram executadas: implantação dos métodos numéricos; determinação do tamanho da malha ideal; medição do tempo de execução; escolha do método de melhor desempenho.

### 2 Modelo de mistura completa e métodos numéricos

Em um reator anaeróbio, a variação da massa por unidade de tempo é igual à variação da massa que entra no reator, menos a variação da massa que sai por reação e/ou por retirada operacional, por unidade de tempo. O modelo de mistura completa considera a concentração da massa de esgoto homogênea em todos os pontos [2]. Assim, a equação de balanço de massa tem a forma da equação 1.

$$\frac{d}{dt}(CV) = Q_e C_e - C(rV - Q_s) \quad (1)$$

com  $C(0) = C_0$  (concentração inicial), onde  $C$  é a concentração do elemento a controlar no reator ( $mg/l$ ),  $V$  é o volume útil do reator ( $l$ ),  $Q_e$  é a vazão de entrada ( $l/h$ ),  $r$  é o coeficiente de rendimento ( $1/h$ ),  $Q_s$  é a vazão de saída ( $l/h$ ),  $C_e$  é a concentração de entrada do elemento ( $mg/l$ ) e  $t(h)$  é o tempo. A variação de volume foi obtida usando as condições operacionais do reator, em três estágios, conforme o experimento de [1], no qual o abastecimento e a retirada são feitos em batelada, como mostra a tabela 1.

---

<sup>1</sup>fernando.brancher@hotmail.com

<sup>2</sup>pedro.borges@uffs.edu.br

Tabela 1: Condições operacionais dos reatores

Estágios	Tempo ( $h$ )	$Q_e(l/h)$	$Q_s(l/h)$	$V(l)$
I	$0 \leq t \leq t_1$	24	0	$V(t) = V_0 + Q_e t$
II	$t_1 < t \leq t_2$	0	0	$V(t) = V_u$
III	$t_2 < t \leq t_f$	0	12	$V(t) = V_u - Q_s t$

A resolução numérica da equação 1 foi implementada pelos Métodos de Runge-Kutta de ordens 1 (equivalente ao Método de Euler), 2 (Runge-Kutta melhorado e modificado), 3 e 4. Todos os métodos foram implementados com algoritmo próprio no ambiente SCILAB. A verificação da eficiência de cada método foi analisada com dois critérios: a precisão e o tempo de execução. O critério de precisão foi o módulo da diferença de  $C(0, 6h) < \varepsilon$ , sendo  $\varepsilon = 0,05$ , para duas execuções sucessivas de  $i \cdot p$  intervalos com  $i = 1, 2, 3, \dots$ , onde  $p$  é o passo de intervalos. O segundo critério foi o tempo de execução computacional.

### 3 Resultados e Discussões

A função  $C(t)$  apresenta forte crescimento e abrupta mudança dessa tendência na passagem do estágio I para o II, devido à finalização do carregamento, com concentração de entrada ( $C_e$ ) cerca de quatro vezes maior do que a concentração do lodo no interior do reator. Esse fato exige malhas refinadas entre no estágio I e no início do II.

Para malhas com  $\Delta t$  constante, o método de Euler estabilizou com 3000 intervalos. Os demais métodos apresentaram resultados semelhantes entre si, estabilizando com 2650. Os tempos médios de execução dos métodos foram: 0,14; 0,18; 0,20; 0,296 e 0,39s, na ordem apresentada acima. Esse resultado ainda é insatisfatório. Foram implementadas soluções para malhas variáveis, nas seguintes condições: para o intervalo  $[0, 0.6h]$ , o qual corresponde a 5% do domínio total, foram usados 60% dos pontos e para  $(0, 6, t_f]$ , correspondente a 95% do intervalo total, 40% dos pontos.

O método de Euler satisfaz o critério de precisão para  $n = 250$  intervalos, enquanto que os demais métodos, foram precisos para  $n = 150$ . Enquanto que o Método de Euler usa 0,016s, os demais métodos executam a solução com esse mesmo tempo. Com essas considerações, conclui-se que todos os métodos pesquisados poderiam ser utilizados no PI com malha variável, desde que o Método de Euler use malha de 250 intervalos e os Métodos de RK 2,3 e 4 ordem, usem 150 intervalos.

### Referências

- [1] F. S. Pescador, Tratamento de esgoto doméstico em reatores sequenciais em batelada (RSBAn), Dissertação de Mestrado, UFRGS, 2001.
- [2] M. Von Sperling. *Introdução à qualidade das águas e ao tratamento de esgotos*. UFMG, Belo Horizonte, 1996.