Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Caracterização de sequências gráficas

Wagner Mariano Pinheiro[1]
André Ebling Brondani[2]
Instituto de Ciências Exatas, UFF, Volta Redonda, RJ

Resumo

Seja G um grafo simples de ordem n. A *sequência de graus* de G é uma n-upla cujas coordenadas, dadas em ordem não crescente, correspondem aos graus dos vértices de G. Uma sequência de graus, em geral, não identifica unicamente um grafo. A Figura 1 exibe as árvores T_1 e T_2 com a mesma sequência de graus $(3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$.

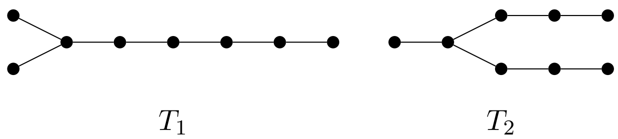

Figura 1: Árvores com a mesma sequência de graus.

Uma sequência de inteiros não negativos $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ é *gráfica* se existe um grafo cuja sequência de graus é d. Para que a sequência $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ seja gráfica é necessário $\sum_{i=1}^{n} d_i$ seja par e $0 \leq d_i \leq n-1$, $1 \leq i \leq n$. No entanto, essas duas condições juntas, não são suficientes para que uma sequência seja gráfica, como mostra o Exemplo 1.

Exemplo 1. *A sequência* $\boldsymbol{d} = (7, 6, 3, 3, 2, 1, 1, 1)$ *não é gráfica, apesar de que cada termo de* $\boldsymbol{d}$ *é um inteiro não negativo menor que oito e a soma dos termos é par. De fato, se* d *fosse gráfica, deveria existir um grafo* G *com oito vértices cuja sequência de graus é* d*. Sejam* u *e* v *os vértices de* G *cujos graus são* 7 *e* 6*, respectivamente. Como* G *é simples,* u *é adjacente a todos os demais vértices de* G *e* v*, além de* u*, deve ser adjacente a outros cinco vértices. Isto significa que o conjunto* $V - \{u, v\}$ *possui cinco vértices com grau, ao menos,* 2*; mas este não é o caso.*

Existem vários resultados que fornecem condições necessárias e suficientes para que uma sequência de inteiros não negativos seja gráfica. As caracterizações mais conhecidas são o Teorema de Havel-Hakimi e o Teorema de Erdos-Gallai, que enunciamos a seguir.

---

[1]wmariano@id.uff.br
[2]andrebrondani@id.uff.br

Teorema 1 (Havel [1]; Hakimi [2])**.** *Seja* $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ *uma sequência não crescente de inteiros não negativos tal que* $d_1 \leq n-1$. *Então* $\boldsymbol{d}$ *é gráfica se e somente se* $\boldsymbol{d'} = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n)$ *é gráfica.*

Teorema 2 (Erdos e Gallai [3])**.** *Uma sequência não crescente de inteiros não negativos* $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ *é gráfica se e somente se* $\sum_{i=1}^{n} d_i$ *é par e para cada inteiro* s, $1 \leq s \leq n$,

$$\sum_{i=1}^{s} d_i \leq s(s-1) + \sum_{j=s+1}^{n} \min(d_j, s).$$

Este trabalho tem como objetivo apresentar um estudo comparativo de alguns critérios que caracterizam sequências gráficas, como os dados nos Teoremas 1 e 2, destacando suas vantagens e desvantagens, além de fazer uma análise das operações de grafos aplicadas em suas demonstrações.

Referências

[1] V. Havel, A remark on the existence of finite graphs, *Casopis Pest. Mat.*, 80: 477–480, 1955.

[2] S.L. Hakimi. On the realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a graph, *J. SIAM Appl. Math.*, 10: 496–506, 1962.

[3] P. Erdos, T. Gallai, Graphs with prescribed degrees of vertices, *Mat. Lapok*, 11: 264–274, 1960.