Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Localização dos Zeros de uma Classe de Polinômios Palindrômicos

Karina Seviero Rampazzi[1]
Licenciatura em Matemática, UNESP, Presidente Prudente, SP
Vanessa Botta[2]
Departamento de Matemática e Computação, UNESP, Presidente Prudente, SP

1 Introdução

O objetivo deste trabalho é apresentar condições necessárias e suficientes para que todos os zeros de um polinômio palindrômico da forma $R(z) = 1+\lambda(z+z^2+\ldots+z^{n-1})+z^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, estejam no círculo unitário. Tais condições já foram estudadas em [1].

De maneira geral, dizemos que um polinômio $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ de grau n, $n \geq 1$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$, é palindrômico se $a_i = a_{n-i}$, para cada $i = 0, \ldots, n$.

A seguir serão apresentadas algumas definições importantes para o desenvolvimento deste estudo.

Definição 1.1. *Seja o polinômio* $P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$, $a_i \in \mathbb{R}$. *Associado ao polinômio* $P(z)$ *considere o polinômio* $P^*(z)$, *dado por*

$$P^*(z) = z^n \overline{P\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} = \overline{a}_0 z^n + \overline{a}_1 z^{n-1} + \ldots + \overline{a}_n = \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_k z^{n-k} = \overline{a}_0 \prod_{j=1}^{n} (z - z_j^*), \quad (1)$$

cujos zeros $z_k^* = \dfrac{1}{\overline{z}_k}$ *são os inversos conjugados dos zeros* z_k.

Definição 1.2. *Considerando* $a_i \in \mathbb{R}$, *então* $P(z) = P^*(z)$, *isto é,* $P(z) = z^n P\left(\dfrac{1}{z}\right)$, *o polinômio* $P(z)$ *é dito palindrômico.*

2 Resultados Principais

Se n é ímpar, o polinômio palindrômico $R(z) = 1 + \lambda(z + z^2 + \ldots + z^{n-1}) + z^n$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, tem algumas propriedades interessantes, como podemos ver no próximo resultado.

[1]karinarampazzi@hotmail.com
[2]botta@fct.unesp.br

Lema 2.1. *Seja* $R(z) = 1 + \lambda(z + z^2 + \ldots + z^{n-1}) + z^n$ *um polinômio de grau ímpar.*

(i) $z = -1$ *é um zero de* $R(z)$ *e* $R(z) = (z+1)Q(z)$*, onde*

$$Q(z) = \sum_{i=0}^{n-1} q_i z^i \text{ com } q_i = \begin{cases} 1, & i \text{ par} \\ \lambda - 1, & i \text{ ímpar.} \end{cases} \tag{2}$$

(ii) Se $\lambda = \dfrac{2n}{n-1}$, $n > 1$, *então* $z = -1$ *é zero de* $R(z)$ *de multiplicidade* 3 *e* $R(z) = (z+1)^3 U(z)$*, onde*

$$U(z) = \sum_{i=0}^{n-3} u_i z^i, \text{ com } u_i = \begin{cases} \dfrac{(i+2)(n-1-i)}{2(n-1)}, & i \text{ par} \\ -\dfrac{(i+1)(n-1-(i+1))}{2(n-1)}, & i \text{ ímpar.} \end{cases} \tag{3}$$

Teorema 2.1. *Os zeros do polinômio* $R(z) = 1 + \lambda(z + z^2 + \ldots + z^{n-1}) + z^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *de grau* $n > 1$ *estão localizados no círculo unitário, se e somente se,*

(i) $-\dfrac{2}{n-1} \leq \lambda \leq 2$ *se* n *é par;*

(ii) $-\dfrac{2}{n-1} \leq \lambda \leq 2 + \dfrac{2}{n+1}$ *se* n *é ímpar.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [1].

Agradecimentos

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro (Processo Número 2016/08051-1).

Referências

[1] V. Botta, L. F. Marques and M. Meneguette, Palindromic and perturbed polynomials: Zeros location, *Acta Math. Hungar.*, **143 (1)**, 81-87, 2014. DOI: 10.1007/s10474-013-0382-0.