Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Dedução da Equação do Calor e o Método de Fourier

Izabella D. Basso[1]
Departamento de Matemática e Computação, FCT/UNESP, Presidente Prudente, SP
José Roberto Nogueira[2]
Departamento de Matemática e Computação, FCT/UNESP, Presidente Prudente, SP

1 Resumo

Neste trabalho apresentaremos o problema da condução do calor em uma barra e sua formulação matemática, sujeito a uma condição inicial e de fronteira.

Consideremos uma barra de comprimento L, área da secção transversal A e superfície lateral isolada termicamente. Assim, a propagação de calor se dá na direção longitudinal.

Sejam duas placas F_1 e F_2 de área A, com temperaturas T_1 e T_2 constantes, respectivamente. O calor passará da placa mais quente para a mais fria se elas estiverem a uma distância d uma da outra. A quantidade de calor que uma placa transfere à outra por unidade de tempo é:

$$Q = \frac{kA|T_2 - T_1|}{d} \tag{1}$$

onde k é a capacidade de condução térmica do material das placas. A equação (1) é conhecida como a **Lei do Resfriamento de Fourier**.

Suponhamos que a barra esteja colocada sobre o eixo x e façamos duas secções transversais no ponto x e no ponto $x + d$. As seções são as placas P_1 e P_2 e $u(x,t)$ é a temperatura em um ponto x, no instante t. Fixemos o tempo t em (1) e seja $T_1 = u(x,t)$ e $T_2 = u(x+d,t)$. Então, o fluxo de calor é dado por:

$$q(x,t) = -kAu_x(x,t) \tag{2}$$

No período de tempo entre t_0 e $t_0 + \tau$, veremos qual a quantidade de calor q que entra em um elemento entre x_0 e $x_0 + \delta$. Por (2), temos:

$$q = \int_{t_0}^{t_0+\tau} kA[u_x(x_0+\delta,t) - u_x(x_0,t)]dt \tag{3}$$

Usando o calor específico c de uma substância, temos:

$$q = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} cu_t(x,t)dt\ \rho A dx \tag{4}$$

[1]iza_diasbasso@outlook.com
[2]jrobnog@gmail.com

onde ρ é a densidade da substância. Igualando (4) e o valor de q obtido usando o teorema fundamental do cálculo em (3), obtemos:

$$u_t = K u_{xx} \tag{5}$$

onde $K = \dfrac{k}{c\rho}$ é a difusibilidade térmica. A equação (5) é conhecida como **equação do calor**.

A equação (5) é uma equação diferencial parcial de ordem 2 e admite várias soluções. Porém, o problema da condução do calor possui uma única solução física e, para encontrá-la, estabeleceremos condições iniciais e de fronteira. A **condição inicial** é a temperatura ao longo da barra no instante $t = 0$, dada por $u(x, 0) = f(x),\ 0 \leqslant x \leqslant L$ e o valor da temperatura nas extremidades $u(0, t)$ e $u(L, t)$ são as **condições de fronteira**.

Para a formulação matemática deste problema, consideremos R uma região do plano (x, t) dada por $R =]0, L[\times\mathbb{R}_+$ reunida com sua fronteira ∂R. O problema consiste em encontrar $u(x, t)$ definida em ∂R que satisfaça o problema de valores inicial e de fronteira:

$$\begin{cases} u_t = K u_{xx} \\ u(x,0) = f(x),\ x \in]0, L[\\ u(0,t) = g(t),\ u(0,L) = h(t) \end{cases} \tag{6}$$

O método clássico para a resolução deste problema é o conhecido **Método de Fourier**. Consideramos $g(t) = h(t) = 0$. O método consiste em procurar soluções da forma $u(x, t) = F(x)G(x)$, utilizando separação de variáveis. Assim, somos levados a candidatos para solução de (6), do tipo:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 Kt/L^2} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{7}$$

A partir de (7) se faz um estudo aprofundado sobre séries e transformada de Fourier, para provar que $u(x, t)$ é a solução clássica de (6).

Este trabalho faz parte de um projeto de iniciação científica intitulado "Métodos de Resolução de Equações Diferenciais com Aplicações em Processamento Digital de Imagens", onde a equação do calor é um dos temas a serem abordados durante o desenvolvimento deste projeto.

Referências

[1] D. G. Figueiredo. *Análise de fourier e equações diferenciais parciais*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, Rio de Janeiro, 1977.

[2] V. Iório. *EDP: Um Curso de Graduação*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, Rio de Janeiro, 1991.