Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

# Análise de Uma Fila $G/D/1/K/$FIFO com Flutuação Aleatória na Taxa de Chegada

Júlia Gruppi Basílio[1]
Campus Alto Paraopeba, UFSJ, Ouro Branco, MG
Telles Timóteo da Silva[2]
Departamento de Física e Matemática, UFSJ, Ouro Branco, MG

## 1 Resumo

A teoria de filas consiste na modelagem e análise de sistemas que envolvem chegada de usuários em um serviço, e um determinado número de canais de servidores [1]. Se a demanda de usuários for maior que o número de servidores para atendimento o resultado pode ser uma *fila* de espera. E se a capacidade de alocação de usuários no sistema for limitada, o resultado pode ser a rejeição de usuários, quando o limite do sistema for atingido. A organização desse sistema é indicada através da seguinte notação criada por D. G. Kendall em 1953, $A/B/C/D/E$, onde $A$ representa a distribuição de tempo de chegadas, $B$ a distribuição de tempo do serviço, $C$ o número de postos de atendimento, $D$ o número de usuários que o sistema comporta, sem que haja rejeição, $E$ a disciplina de atendimento [2].

O modelo analisado neste trabalho é do tipo $G/D/1/K/$FIFO, isto é,
1. a taxa de chegadas segue uma distribuição de probabilidades que será vista conforme a construção abaixo;
2. a taxa de chegadas dos usuários é constante;
3. o número de postos de atendimento é igual a um;
4. o limite de usuários no sistema é K;
5. a disciplina de atendimento é FIFO, ou seja, o primeiro cliente a chegar é o primeiro a ser atendido.

O tempo de chegada dos usuários flutua segundo uma distribuição de probabilidades da forma descrita a seguir. Fixe $\lambda > 0$, $0 < p < 1$ e $p_1 = 1 - p_0$. Seja $\theta(j)$ uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas para $j = 1, 2, \ldots$, tais que $\theta(j) \in \{0, 1\}$ satisfazendo

$$\mathcal{P}(\theta(j) = i) = p_i. \tag{1}$$

Os usuários podem chegar à taxa $\frac{1}{\lambda}$ ou à taxa $\frac{1}{2\lambda}$ dependendo do valor da variável $\theta(j)$. Isto pode ser formalizado definindo-se a variável $\tau_j$, $j = 1, 2, \ldots$, que representa o tempo

[1] Aluna de iniciação científica, juliagruppi@gmail.com
[2] timoteo@ufsj.edu.br

 

em que o $j$-ésimo cliente se apresenta, definida por $\tau_1 = 0$ e

$$\tau_j = \frac{1}{2\lambda}\left[j - 1 + \sum_{l=1}^{j-1} \theta(l)\right] \tag{2}$$

para $j = 2, 3, \ldots$.

A taxa de serviço será adotada como $\frac{1}{\lambda}$.

Em função da escolha destes regimes de taxas de chegada e serviço, queremos analisar, em termos dos parâmetros $p_0$ e $K$, o desempenho do sistema, eventos de rejeições e as distribuições de probabilidades subjacentes.

Sempre que possível é interessante dividir o processo de formação de filas em dois momentos: *antes* de e *após* ocorrer a primeira rejeição. Portanto seja $t^*$ o instante de tempo em que ocorre a primeira rejeição. O intervalo [0,t*) é chamado de *regime transiente*. Já o intervalo [t*,$\infty$) é conhecido como regime estacionário, pois apresenta poucas variações em suas medidas de desempenho.

No modelo estudado, para que ocorra a primeira rejeição, é necessário que haja acumulação de K usuários no sistema. Isto ocorre quando 2K - 1 usuários se apresentam à taxa $\frac{1}{2\lambda}$. Daí a primeira rejeição ocorre no tempo $\tau_j$ apenas sob as seguintes condições:
1. O número de usuários no sistema é igual a K para $\tau_{j-2} < t < \tau_{j-1}$ .
2. Finaliza-se um atendimento no tempo $\tau_{j-1}$ (um usuário sai do sistema).
3. Um usuário entra no tempo $\tau_{j-1}$ (um novo usuário entra no sistema).
4. Um outro usuário se apresenta a uma taxa $\frac{1}{2\lambda}$, i.e., o tempo $\tau_j = \tau_{j-1} + \frac{1}{2\lambda}$.

Decorre que este último usuário será rejeitado, pois o sistema já possui $K$ usuários e não comportaria $K + 1$.

Para que o $j$-ésimo cliente seja o primeiro a ser rejeitado, o tempo decorrido desde o início do sistema deve ser

$$t^* = \frac{1}{\lambda}\left[j - K - \frac{1}{2}\right] \tag{3}$$

e a probabilidade disto ocorrer é

$$\mathcal{P}\left(t^* = \frac{1}{\lambda}\left[j - K - \frac{1}{2}\right]\right) = \binom{j-2}{2K-2} p_0^{2K-1}(1-p_0)^{j-2K} \tag{4}$$

Diversos outros pontos de interesse foram analisados e serão discutidos no trabalho.

## Referências


[1] J. P. A. Albuquerque, J. M. Fortes and W. A.Finamore. *Probabilidade, Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos*. Interciência, Rio de Janeiro, 2008.

[2] M. C. Fogliatti and N. M. C. Mattos. *Teoria de Filas*. Interciência, Rio de Janeiro, 2007.