Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Teorema do Posto

Gustavo V. de Souza[1]
Departamento de Matemática e Computação, FCT-UNESP, 19060-900, Presidente Prudente, SP
Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta[2]
Departamento de Matemática e Computação, FCT-UNESP, 19060-900, Presidente Prudente, SP

Resumo

A proposta deste trabalho é apresentar o Teorema do Posto, entender quais são as hipóteses e os resultados deste teorema e algumas de suas consequências. Pelo fato do teorema fornecer um resultado geral, a apresentação de exemplos e, principalmente, aplicações pode ajudar a elucidar qual a motivação, de onde surgiu a necessidade deste resultado e, de fato,sob quais hipóteses este teorema facilita a demonstração de alguns resultados como, por exemplo, a Forma Local das Imersões de classe C^1 e Forma Local das Submersões de classe C^1. A grosso modo, o Teorema do Posto estabelece que dada uma função f de classe C^1 com posto constante, a menos de composições de bijeções, a função f é simplesmente uma função projeção.

O *posto* de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é a dimensão da sua imagem $T \cdot \mathbb{R}^m$, isto é, o número máximo de vetores linearmente independentes entre $T \cdot e_1, \cdots, T \cdot e_m$, ou, equivalentemente, o número máximo de colunas linearmente independentes da matriz de T. Prova se em Álgebra Linear que este é também o número máximo de linhas se, e somente se, a matriz de T contém um determinante menor $r \times r$ não-nulo, mas qualquer determinante menor de ordem $r + 1$ é igual a zero. O posto de uma aplicação diferenciável $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ num ponto $x \subset U$ é o posto da sua derivada $f'(x) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Esse posto, evidentemente, não pode ser maior do que m nem maior do que n. Uma imersão $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ tem posto m em todos os pontos $x \in U$ e uma submersão tem posto n em qualquer ponto. Por isso, imersões e submersões são chamadas aplicações de posto máximo.

Fundamentação teórica

Lema 1. *Seja $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\ltimes$ um aberto verticalmente convexo. Se $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ tem a segunda derivada parcial $\partial_2 f$ identicamente nula em U então f é independente da segunda variável, isto é, $f(x, y) = f(x, y_0)$ para qualquer (x, y) e $(x, y) \in U$.*

[1] gustavovicente1997@gmail.com
[2] pimenta@fct.unesp.br

Lema 2. *Seja $E \subset \mathbb{R}^{m+p}$ um subespaço m-dimensional. Então existe uma decomposição em soma direta $\mathbb{R}^{m+p} = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^p$ tal que a primeira projeção $\pi : \mathbb{R}^{m+p} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\pi(u, v) = u$, aplica E isomorficamente sobre $\mathbb{R}^m$.*

Teorema do Posto 1. *Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{m+p}$ de classe $C^k(k \geq 1)$ e posto constante m em cada ponto do aberto $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$.Para cada ponto $a \in U$ existem difeomorfismos α, de um aberto em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ sobre uma vizinhança aberta de a, e β, de uma vizinhança aberta de $f(a)$ sobre um aberto em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$, ambos, α e β, de classe C^k, tais que $\beta \circ f \circ \alpha : (x, y) \longrightarrow (x, 0)$.*

Demonstração 1. *Seja $E = f'(a) \cdot \mathbb{R}^{m+n} \subset \mathbb{R}^{m+p}$. Então pelo Lema 2 existe uma decomposição em soma direta $\mathbb{R}^{m+p} = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^p$ tal que a primeira projeção $\pi : \mathbb{R}^{m+p} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ aplica E isomorficamente sobre $\mathbb{R}^m$. Então $(\pi \circ f)'(a) = \pi \circ f'(a) : \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é sobrejetiva. Pela Forma Local das Submersões, existe um difeomorfismo $\alpha \in C^k$ de um aberto $V_0 \times W \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ sobre uma vizinhança aberta de a tal que $\pi f \alpha(x, y) = x$. Isto significa que $f\alpha(x, y) = (x, \lambda(x, y))$, onde $\lambda : V_0 \times W \longrightarrow \mathbb{R}^p$ é de classe C^k. Afirmamos que $\partial_2 \lambda = 0$. Como o posto de $f\alpha$ (igual ao da f) é m temos $B = 0$, donde $\partial_2 \lambda = 0$. Como W pode ser tomado convexo, segue-se do Lema 1 que $\lambda(x, y)$ não depende de y. Seja $\alpha(a_1, a_2) = a$. Considerando a injeção $i : V_0 \longrightarrow V_0 \times W$ dada por $i(x) = (x, a_2)$ obtemos a aplicação de classe C^k, $f\alpha i : x \longmapsto (x, \lambda(x, a_2))$, que tem derivada injetiva no ponto a_1 e cumpre $f\alpha i(x) = f\alpha(x, y)$ para qualquer $(x, y) \in V_0 \times W$. Pela forma Local das Imersões, existe um difeomorfismo β de classe C^k numa vizinhança aberta de $f(a)$ sobre um aberto em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$, tal que $\beta f \alpha i(x) = (x, 0)$. Aqui, x está possivelmente num aberto $V \subset V_0$, contendo a_1. Como $f\alpha i(x) = f\alpha(x, y)$, temos $\beta f \alpha(x, y) = (x, 0)$ quaisquer que sejam $x \in V$, $y \in W$.*

Referências

[1] E. L. Lima, *Curso de análise vol.2.* Projeto Euclides, Rio de Janeiro:IMPA, 2015.

[2] E. L. Lima, *Análise no espaço* $\mathbb{R}^n$. Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro:IMPA, 2013.

