

SÍNTESE μ NÃO-DIFERENCIÁVEL APLICADA AO CONTROLE DE MÍSSIL

GUILHERME JOSÉ DE SOUZA SANTOS*, ALBERTO MOTA SIMÕES*

*Praça General Tibúrcio, 80, Praia Vermelha
Instituto Militar de Engenharia
Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Emails: guilhermejsantos@gmail.com, simoes@ime.eb.br

Abstract— If, on the one hand, the complex μ synthesis can be easily performed via a structured H_∞ synthesis, on the other hand, the mixed μ synthesis is unfortunately not so straightforward. The explanation for this discrepancy lies in the different way the $D - G$ upper bound on μ is calculated in both cases. In this work, a non-smooth mixed μ synthesis technique recently presented is evaluated in a difficult control problem involving the non-linear model of a missile.

Keywords— μ synthesis, non-smooth optimization, robust control.

Resumo— Se por um lado a síntese μ complexa pode ser realizada diretamente a partir de uma síntese H_∞ estruturada, por outro lado a síntese μ mista revela-se bem mais delicada, por causa da forma como o limite superior $D - G$ para μ é calculado nos dois casos. No presente trabalho, uma técnica de síntese μ não-diferenciável proposta recentemente é avaliada em um problema difícil de controle do modelo não-linear de um míssil.

Palavras-chave— síntese μ , otimização não-diferenciável, controle robusto.

1 Introdução

A técnica de síntese H_∞ não-diferenciável introduzida em (Apkarian and Noll, 2006b) representou um grande avanço na teoria de controle robusto. Um dos principais atrativos dessa técnica consiste na possibilidade de se sintetizar controladores H_∞ submetidos a restrições estruturais, o que torna possível se projetar controladores cuja estrutura é definida *à priori*. Desse modo, pode-se então realizar um projeto onde os diversos integrantes do sistema de controle, tais como pré-compensador ou controlador de realimentação, são sintonizados simultaneamente. Essa flexibilidade representa um grande avanço sobre as técnicas de síntese H_∞ tradicionais baseadas em equações algébricas de Riccati ou desigualdades matriciais do tipo LMI, que apenas conseguem produzir controladores de ordem plena. É verdade, entretanto, que o preço a se pagar por tal flexibilidade é a perda da optimidade global, uma vez que a não-convexidade do problema de minimização solucionado requer a aplicação de algoritmos especializados que conseguem oferecer apenas certificado de optimidade local. Entre outras vantagens da abordagem não-diferenciável H_∞ pode-se citar sua capacidade de tratar sistemas de ordem elevada, bem como sua fácil extensão para problemas multi-objetivos envolvendo restrições espectrais, nos domínios do tempo e da frequência (Simões et al., 2009).

Sabe-se que a relação entre as sínteses μ e H_∞ é estreita, uma vez que um limite superior para o valor de μ pode ser calculado através de uma norma H_∞ escalonada (Zhou et al., 1996; Skogestad and Postlethwaite, 2005). No caso da síntese μ complexa, a realização da síntese μ a partir da síntese H_∞ é direta, bastando para tanto apenas se considerar o multiplicador como componente

de um certo controlador aumentado que também compreende o controlador original (Apkarian and Noll, 2006b). Já no caso da síntese μ mista, o problema torna-se mais complicado devido ao fato daquele limite superior ser expresso não mais em termos de valores singulares como na norma H_∞ , mas sim em termos de autovalores (Fan and Tits, 1991), dificultando assim a realização da síntese μ diretamente a partir de uma simples síntese H_∞ .

Em (Apkarian and Noll, 2006a), o problema da síntese μ não-diferenciável foi tratado utilizando-se o formalismo IQC (do inglês *Integral Quadratic Constraints*). Para resolver o problema de viabilidade baseado em desigualdades no domínio da frequência (ou FDI, do inglês *Frequency Domain Inequalities*) que surge da formulação IQC, a técnica requer a solução de um problema de minimização envolvendo uma função autovalor como objetivo. A grande desvantagem dessa abordagem é que ela baseia-se no algoritmo em (Kao et al., 2004) para o cálculo da função objetivo, algoritmo esse cuja eficiência ainda precisa ser comprovada. Note que a síntese H_∞ , por outro lado, baseia-se no consagrado algoritmo de (Bruinsma and Steinbuch, 1990). A fim de se contornar essa dificuldade, uma nova técnica de síntese μ não-diferenciável foi proposta recentemente em (Apkarian, 2011). Nessa abordagem, o problema de viabilidade para a síntese μ é reformulado como um problema de minimização H_∞ típico.

O objetivo do presente trabalho é avaliar a técnica de síntese μ não-diferenciável de (Apkarian, 2011) em um problema difícil de controle do modelo não-linear de um míssil. O artigo está organizado da seguinte maneira. Na Seção 2,

são apresentados os principais elementos da síntese μ não-diferenciável utilizada. Na Seção 3, a técnica é aplicada no projeto de um controlador para o modelo longitudinal não-linear de um míssil ar-ar. A Seção 4 traz as conclusões do trabalho.

2 Síntese μ não-diferenciável

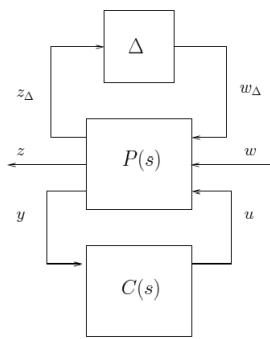


Figura 1: Forma padrão para a síntese μ

Considere a interconexão clássica para síntese μ mostrada na Figura 1, onde $P(s)$ representa a planta de síntese, $C(s)$ é o controlador a ser projetado, e Δ reúne as incertezas afetando o sistema. Assume-se que o bloco de incertezas Δ possua a seguinte estrutura particular:

$$\Delta \triangleq \{\Delta = \text{diag}(\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_q I_{r_q}, \Delta_P) : \delta_i \in \mathbb{R}, \Delta_P \in \mathbb{C}^{m_1 \times m_1}\}, \quad (1)$$

com $N \triangleq \sum_{i=1}^q r_i + m_1$. O bloco de incertezas $\Delta \in \Delta$ é então constituído de incertezas paramétricas repetidas mais um bloco complexo cheio Δ_P que geralmente está associado a especificações de desempenho. A bola unitária em Δ é representada por $\mathbf{B}\Delta \triangleq \{\Delta \in \Delta : \|\Delta\| \leq 1\}$.

Seja $N(s) \triangleq \mathcal{F}_l(P(s), C(s))$, onde $\mathcal{F}_l(\cdot, \cdot)$ representa a notação padrão para uma LFT inferior. Seja também $\Delta_{\mathbb{R}} \triangleq \text{diag}(\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_q I_{r_q})$, de modo que $\Delta = \text{diag}(\Delta_{\mathbb{R}}, \Delta_P)$. Sabe-se que o sistema em malha fechada da Figura 1 será bem-posto, internamente estável para todo $\Delta_{\mathbb{R}} \in \mathbf{B}\Delta_{\mathbb{R}}$, e apresentará desempenho robusto

$$\|\mathcal{F}_u(N(s), \Delta_{\mathbb{R}})\|_{\infty} < 1, \quad \forall \Delta_{\mathbb{R}} \in \mathbf{B}\Delta_{\mathbb{R}}, \quad (2)$$

se, e somente se (Zhou et al., 1996; Skogestad and Postlethwaite, 2005),

$$\mu_{\Delta}(N(j\omega)) < 1, \quad \forall \omega. \quad (3)$$

Considere agora os seguintes conjuntos de multiplicadores:

$$\mathbf{D}_{\Delta} \triangleq \{D(s) : D \in \mathbb{C}^{N \times N}, \det(D) \neq 0, \Delta D = D\Delta, \forall \Delta \in \Delta\}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\Delta} &\triangleq \{G(s) : G = G^H \in \mathbb{C}^{N \times N}, \\ &G\Delta = \Delta^H G, \forall \Delta \in \Delta\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Denote-se por D_{ω} o valor de $D(s) \in \mathbf{D}_{\Delta}$ calculado em $s = j\omega$, idem para G_{ω} . Seja $S_{\omega} \triangleq D_{\omega}^H D_{\omega} \succ 0$. Mostra-se que uma condição suficiente para (3) é que a seguinte desigualdade matricial seja satisfeita (Fan and Tits, 1991; Apkarian, 2011):

$$\begin{aligned} &N(j\omega)^H S_{\omega} N(j\omega) - S_{\omega} \\ &+ j(G_{\omega} N(j\omega) - N(j\omega)^H G_{\omega}) \prec 0, \quad \forall \omega. \end{aligned} \quad (6)$$

Considere, agora, as seguintes matrizes:

$$\mathcal{B}_N \triangleq \begin{bmatrix} I_N & -\sqrt{2}I_N \\ \sqrt{2}I_N & -I_N \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{B}}_N \triangleq \begin{bmatrix} I_N & \sqrt{2}I_N \\ \sqrt{2}I_N & I_N \end{bmatrix}.$$

Aplicando-se a transformação bilinear induzida por \mathcal{B}_N , mostra-se que a desigualdade (6) pode ser reescrita na forma da seguinte condição real negativa:

$$M_{\omega} \mathcal{F}_l(\mathcal{B}_N \star P(j\omega), C(j\omega)) + (*) \prec 0, \quad \forall \omega, \quad (7)$$

onde $M_{\omega} \triangleq -(S_{\omega} + jG_{\omega})$, e \star denota o produto estrela de Redheffer. Por construção, M_{ω} possui a mesma estrutura que os multiplicadores D_{ω} , com a propriedade real negativa $M_{\omega} + M_{\omega}^H \prec 0$. Em resumo, havendo estabilidade nominal da planta em malha fechada, a condição de Desempenho Robusto em (3) será atendida sempre que as seguintes desigualdades matriciais no domínio da frequência forem atendidas:

$$M_{\omega} \mathcal{F}_l(B_N \star P(j\omega), C(j\omega)) + (*) \prec 0, \quad (8)$$

$$M_{\omega} + (*) \prec 0. \quad (9)$$

Representando-se o multiplicador $M(s)$ como $M(s) = M_1(s)^H M_2(s)$, onde ambos $M_1(s)$ e $M_2(s)$ são biestáveis, as desigualdades (8)-(9) podem ser reescritas como:

$$M_{2,\omega} \mathcal{F}_l(\mathcal{B}_N \star P(j\omega), C(j\omega)) M_{1,\omega}^{-1} + (*) \prec 0, \quad (10)$$

$$M_{1,\omega} M_{2,\omega}^{-1} + (*) \prec 0. \quad (11)$$

Sejam, agora, $W_1(s) \triangleq M_1(s) - I$ e $W_2(s) \triangleq M_2(s) - I$. Note que $W_1(s)$ e $W_2(s)$ possuem a mesma estrutura de $M(s)$. Utilizando-se o Lema 1 de (Ly et al., 1994), mostra-se que a FDI (11) é satisfeita se e somente se a seguinte desigualdade for satisfeita:

$$\left\| \mathcal{F}_l \left(P_m, \begin{bmatrix} W_1(s) & 0 \\ 0 & W_2(s) \end{bmatrix} \right) \right\|_{\infty} < 1, \quad (12)$$

com

$$P_m \triangleq \tilde{\mathcal{B}}_N \star \begin{bmatrix} I_N & | & I_N & -I_N \\ - & - & - & - \\ I_N & | & 0 & -I_N \\ I_N & | & 0 & -I_N \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Mostra-se, também, que o primeiro termo em (10) pode ser reescrito como

$$\mathcal{F}_l(L_w(\mathcal{B}_N \star P(j\omega))R_w + Q_w, K(j\omega)), \quad (14)$$

onde

$$K(s) \triangleq \begin{bmatrix} C(s) & 0 & 0 \\ 0 & W_1(s) & 0 \\ 0 & 0 & W_2(s) \end{bmatrix}$$

e L_w , R_w e Q_w são dadas por

$$L_w \triangleq \begin{bmatrix} I_N & 0 \\ - & - \\ 0 & I_{p2} \\ 0 & 0 \\ I_N & 0 \end{bmatrix}, \quad R_w \triangleq \begin{bmatrix} I_N & 0 \\ - & - \\ 0 & I_{m2} \\ -I_N & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_w \triangleq \begin{bmatrix} 0 & | & 0 & 0 & I_N \\ - & - & - & - & - \\ 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ I_N & | & 0 & -I_N & 0 \\ 0 & | & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Considerando-se (14) e utilizando-se novamente o Lema 1 de (Ly et al., 1994), conclui-se que a FDI (10) é equivalente à seguinte condição:

$$\|\mathcal{F}_l(\tilde{\mathcal{B}}_N, \mathcal{F}_l(L_w(\mathcal{B}_N \star P(s))R_w + Q_w, K(s)))\|_\infty < 1. \quad (15)$$

Definindo-se

$$P_w(s) \triangleq \tilde{\mathcal{B}}_N \star (L_w(\mathcal{B}_N \star P(s))R_w + Q_w), \quad (16)$$

a restrição (15) pode ser reescrita como:

$$\|\mathcal{F}_l(P_w(s), K(s))\|_\infty < 1. \quad (17)$$

Em suma, as restrições (12) e (17) representam uma condição necessária e suficiente para a FDI (6).

O problema de viabilidade dado por (12) e (17) pode ser abordado através da resolução do seguinte problema de minimização:

$$\begin{aligned} & \text{minimize}_{K(s)} \max \{ \|\mathcal{F}_l(P_w(s), K(s))\|_\infty, \\ & \quad \left\| \mathcal{F}_l \left(P_m, \begin{bmatrix} W_1(s) & 0 \\ 0 & W_2(s) \end{bmatrix} \right) \right\|_\infty \} \end{aligned} \quad (18)$$

Note que se a solução encontrada for tal que o valor da função objetivo em (18) é menor do que 1, então trata-se de uma solução viável para o problema de viabilidade de síntese dado por (12) e (17). Considerados conjuntamente, os termos do tipo H_∞ na função de maximização também asseguram que os fatores $M_1(s)$ e $M_2(s)$ são biesáveis. Resumindo, se um controlador aumentado $K(s)$ é encontrado de tal forma que a função minimizada em (18) seja estritamente menor que 1, então o controlador $C(s)$ atinge as restrições de desempenho descritas em (2).

É possível generalizar a presente formulação de síntese μ para tratar, também, problemas de síntese ν (Fan and Tits, 1992). Para tanto, basta substituir $P(s)$ em (16) por:

$$\begin{bmatrix} \varphi I_{\sum_i r_i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} I_{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{p_2} \end{bmatrix} P(s), \quad (19)$$

onde $\varphi, \gamma \in \mathbb{R}^+$. Este formalismo permite tratar, por exemplo, os seguintes problemas adicionais:

- Desempenho robusto: qual o menor γ tal que, sempre que a incerteza possuir tamanho $\frac{1}{\gamma}$ ou menor, a norma H_∞ do pior caso de desempenho é menor que γ ? Neste caso, $\varphi \triangleq \frac{1}{\gamma}$;
- Pior caso de desempenho: qual o menor γ tal que, sempre que a incerteza possuir tamanho 1 ou menor, a norma H_∞ do pior caso de desempenho é menor que γ ? Neste caso, $\varphi \triangleq 1$;
- Maior incerteza admissível: qual o maior φ tal que, sempre que a incerteza possuir tamanho φ ou menor, a norma H_∞ do pior caso de desempenho é menor que 1? Neste caso, $\gamma \triangleq 1$.

Em todas as situações acima, γ e φ dever ser trazidos para baixo, quando não estiverem fixos, através de uma busca dicotômica baseada no método da bisseção.

3 Aplicação ao controle de um míssil

A técnica de síntese μ não-diferenciável da Seção 2 é aplicada agora no projeto de um piloto automático para o modelo longitudinal não-linear de um míssil ar-ar introduzido em (Reichert, 1992).

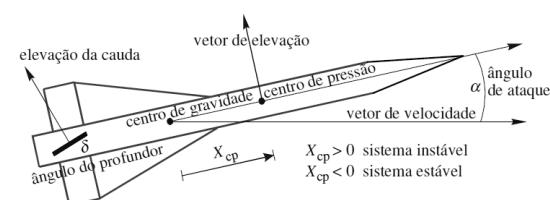


Figura 2: Diagrama físico do míssil

No modelo longitudinal do míssil representado na FIG. 2, as variáveis de estado são o ângulo de ataque $\alpha(t)$ (em $^\circ$), a velocidade angular em arfagem $q(t)$ (em $^\circ/\text{s}$), o ângulo de deflexão do profundo $\delta(t)$ (em $^\circ$) e sua derivada $\dot{\delta}(t)$ (em $^\circ/\text{s}$). A aceleração normal $\eta(t)$ (em g) e a velocidade angular em arfagem $q(t)$ são as saídas medidas, e a entrada é dada pela deflexão comandada do profundo δ_c . Uma representação quasi-LPV da

dinâmica do míssil incluindo-se o atuador é dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_\alpha & 1 & Z_\delta & 0 \\ M_\alpha & 0 & M_\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_a^2 & -2\zeta\omega_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\omega_a^2 \end{bmatrix} \delta_c \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} \eta \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_\alpha & 0 & N_\delta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} \quad (21)$$

onde:

$$Z_\alpha = K_\alpha \ M \ \cos \alpha \ [a_n \alpha^2 + b_n |\alpha| + c_n (2 - \frac{M}{3})],$$

$$Z_\delta = K_\alpha \ M \ \cos \alpha \ d_n,$$

$$M_\alpha = K_q M^2 [a_m \alpha^2 + b_m |\alpha| + c_m (-7 + \frac{8M}{3})],$$

$$M_\delta = K_q \ M^2 \ d_m,$$

$$N_\alpha = K_z M^2 [a_n \alpha^2 + b_n |\alpha| + c_n (2 - \frac{M}{3})],$$

$$N_\delta = K_z \ M^2 \ d_n.$$

A descrição não-linear acima representa um míssil voando a uma altitude de 20.000 ft, supondo-se desacoplamento entre os eixos de guinada e de rolagem. Os valores numéricos e as unidades dos coeficientes em (20)-(21) estão disponíveis em (Reichert, 1992; Pellanda, 2001). São parâmetros variantes no tempo $\alpha(t)$ e $M(t)$, sendo $\alpha(t)$ um parâmetro endógeno e o número de *Mach* $M(t)$ uma variável exógena. Note que, devido à simetria das equações do míssil em torno de $\alpha = 0$, controladores podem ser projetados para $\alpha > 0$ e, então, interpolados em $|\alpha|$ e $M(t)$. A evolução temporal do número de *Mach* é representada por

$$\dot{M} = \frac{1}{v_s}[-|\eta| \sin(|\alpha|) + A_x M^2 \cos(\alpha)] \quad (22)$$

com $M(0) = 4$ sendo um valor realista.

Em (Pellanda, 2001) foi desenvolvida uma representação LFT do modelo quasi-LFT (20)-(21) compatível com a Figura (1), com Δ dado por

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_\alpha I_6 & 0_6 \\ 0_6 & \delta_M I_6 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

com δ_α e δ_M escalares reais e variantes no tempo. Note que, nesse caso, os multiplicadores para a síntese μ devem ser estáticos (Shamma, 1994).

O objetivo de projeto é a síntese de um controlador que mantenha a estabilidade sobre toda a faixa de operação, isto é, $\alpha \in [-30^\circ, 30^\circ]$ e $M \in [2, 4]$, além de garantir o acompanhamento

de comandos em degrau em η_c com constante de tempo não maior que 0.35 s, ultrapassagem máxima de 10% e erro em estado estacionário menor do que 1%. A estrutura de controle em malha fechada adotada é mostrada na FIG. 3.

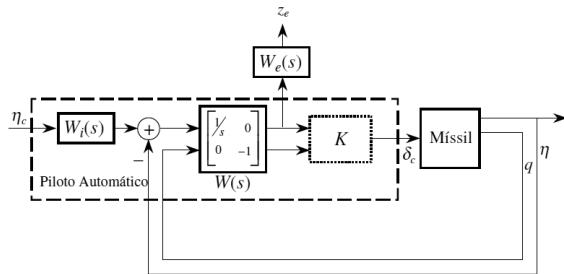


Figura 3: Planta de síntese para o exemplo do míssil

Na síntese μ , os objetivos de desempenho precisam ser expressos pela escolha de funções de ponderação freqüenciais apropriadas. O pré-compensador $W_i(s)$ é usado para bloquear variações rápidas do sinal de comando, evitando a saturação do atuador. A função de ponderação $W_e(s)$ penaliza o erro de referência. Os seguintes valores numéricos foram adotados:

$$W_i(s) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} -10 & 1 \\ \hline 10 & 0 \end{array} \right], \quad (24)$$

$$W_e(s) \triangleq \left[\begin{array}{cc|c} -472, 38 & 917, 43 & -164, 68 \\ -917, 43 & -1078, 2 & -121, 66 \\ \hline -164, 68 & 121, 66 & 0, 1112 \end{array} \right]. \quad (25)$$

3.1 Estabilidade robusta

Inicialmente, procurou-se projetar um controlador LTI que garantisse estabilidade robusta. Nesse caso, tem-se que $N = 12$, que a dimensão do canal de desempenho é dada $m_1 = 0$, e que a dimensão do canal de controle é dada por $m_2 = 1$ e $p_2 = 2$. Foi utilizada ordem 0 para o multiplicador, enquanto que a ordem do controlador foi escolhida como 4. Conforme observado anteriormente, a escolha de um multiplicador estático deve-se ao fato da incerteza tratar-se de parâmetro variante no tempo (Shamma, 1994). Neste caso, introduz-se certo conservadorismo devido à hipótese implícita de um limite superior infinito para a taxa de variação do parâmetro.

Utilizando-se o programa (18), não foi possível encontrar um controlador LTI que garantisse estabilidade robusta para toda a faixa de operação $\alpha \in [-30^\circ, 30^\circ]$ e $M \in [2, 4]$. A estabilidade robusta só pode ser obtida supondo-se um número de *Mach* fixo. Para este valor de $M = 3$, obteve-se um controlador garantindo estabilidade para $\alpha \in [-20^\circ, 20^\circ]$. Assim sendo, para a etapa seguinte assumiu-se $M = 3$, $\delta_M = 0$, e $\alpha \in [-20^\circ, +20^\circ]$ graus.

3.2 Desempenho robusto

O primeiro passo para o projeto de um controlador LTI garantindo estabilidade robusta consistiu-se na realização de uma síntese H_∞ de ordem plena considerando-se o modelo nominal, isto é, sem incertezas no ângulo de ataque e no número de *Mach*. Note que na síntese μ não se conseguirá um valor para γ , considerando-se a matriz generalizada na EQ. (19), menor do que o obtido pela síntese H_∞ , que no presente exemplo foi de 0,2474.

Para a síntese μ não-diferenciável, tem-se $-1 < \delta_\alpha < 1$ e $\delta_M = 0$. A dimensão do canal de incerteza é dada por $N = 7$, a dimensão do canal de desempenho é dada por $m_1 = 1$, e a dimensão do canal de controle é dada por $m_2 = 1$ e $p_2 = 2$. Foi selecionada a ordem 4 para o controlador. O valor mínimo encontrado para γ foi de 2,8875.

Inicialmente, procedeu-se a uma análise qualitativa utilizando-se o modelo LFT do míssil em malha fechada com o controlador K_μ obtido pela síntese μ não-diferenciável, considerando-se o parâmetro δ_α congelado. A FIG 4 apresenta a resposta ao degrau (η_c para η) do sistema em malha fechada para 10 amostras diferentes do parâmetro congelado.

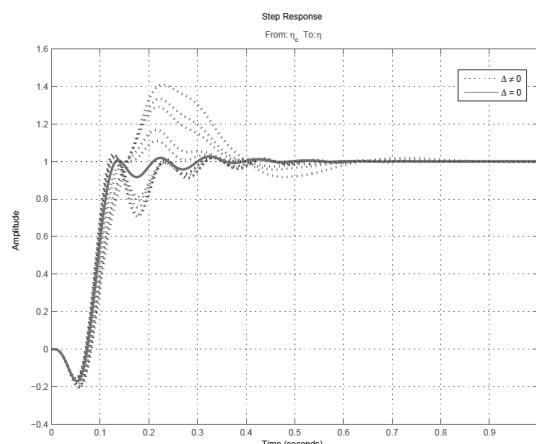


Figura 4: Resposta ao degrau do sistema em malha fechada considerando-se o parâmetro congelado.

Na FIG 5 é mostrada simulação realizada com o modelo não-linear do míssil em malha fechada com o controlador K_μ , considerando $M = 3$, para se verificar a capacidade de acompanhamento de uma aceleração normal de referência $\eta_c(t)$. Na FIG 6 é mostrada a evolução temporal do ângulo de ataque, correspondendo à trajetória do sistema não-linear em malha fechada mostrada na FIG 5.

3.3 Síntese H_∞ -LPV

O objetivo final do presente trabalho era a utilização da síntese μ não-diferenciável da Seção 2 para

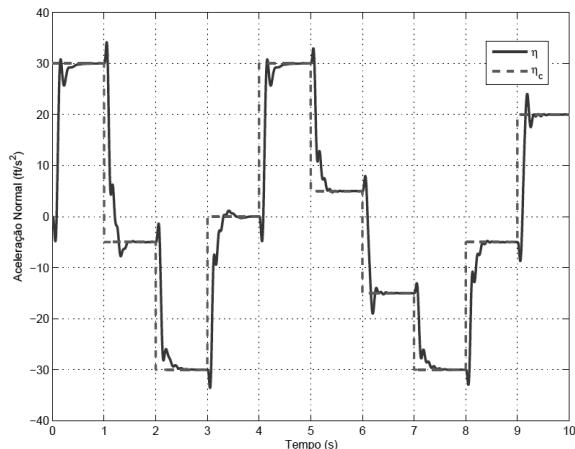


Figura 5: Acompanhamento de referência do modelo não-linear do míssil em malha fechada com o controlador K_μ , para $M = 3$.

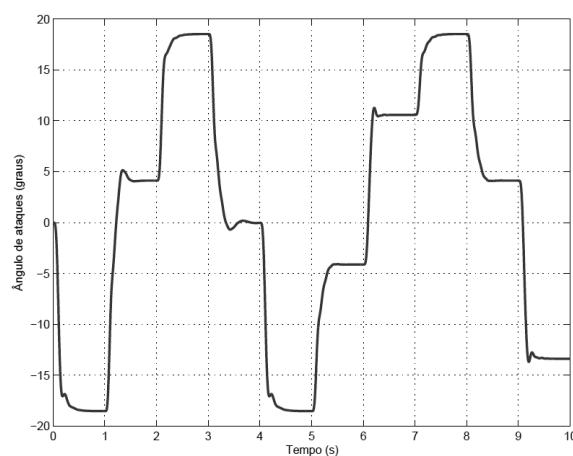


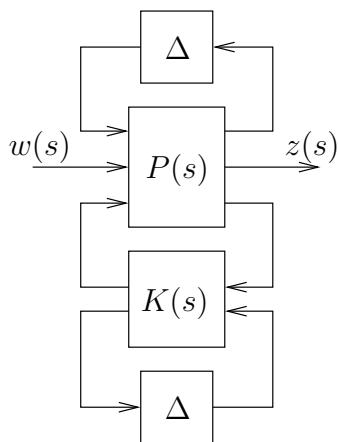
Figura 6: Evolução temporal do ângulo de ataque.

o projeto de um controlador H_∞ -LPV conforme proposto em (Apkarian and Gahinet, 1995). Nessa abordagem, os parâmetros variantes no tempo podem ser medidos pelo controlador LPV conforme representado na FIG 7. Note que o sistema da FIG 7 pode ser facilmente rearranjado na forma padrão da FIG 1. Nesse caso, o novo bloco de incertezas será dado por

$$\begin{bmatrix} \Delta & 0_{12} \\ 0_{12} & \Delta \end{bmatrix}, \quad (26)$$

e a dimensão do canal de incerteza é dada por $N = 24$.

No presente caso, mesmo utilizando-se diversos pontos iniciais não foi possível encontrar uma solução viável (i.e., custo < 1) para o programa (18). Assim, não foi possível encontrar um controlador que garantisse estabilidade robusta considerando-se o modelo quasi-LPV completo (20)-(21). No presente contexto, significa que não foi possível encontrar um controlador LPV que estabilizasse a planta não-linear. Esse

Figura 7: Forma padrão para a síntese H_∞ -LPV.

resultado foi em certa medida inesperado, na medida em que o novo controlador possui mais grau de liberdade que o controlador LTI anterior, de modo que seria esperado a obtenção de uma maior robustez. Uma possível explicação para esse fato parece residir no fato de a técnica de otimização utilizada possuir certificado de optimalidade apenas local. Acrescente-se a isso o fato de que a função objetivo em (18) parece possuir pontos críticos associados ao valor 1 que tendem a atrair a iteração, impedindo assim a obtenção de uma solução viável para o problema de projeto. Infelizmente, esse efeito parece tender a se tornar mais crítico à proporção que a dimensão N do canal de incertezas aumenta, uma vez que multiplicadores de maior dimensão implicam um número maior de variáveis de projeto.

4 Conclusão

Uma técnica recente de síntese μ mista baseada em otimização não-diferenciável foi discutida nesse trabalho, bem como sua aplicação no controle do modelo longitudinal não-linear de um míssil. A técnica de projeto discutida possui o grande atrativo de permitir a síntese de controladores LTI ou até mesmo LPV com estrutura definida *a priori*. Na presente aplicação, entretanto, a técnica não se mostrou capaz de fornecer um controlador satisfatório quando se considera o modelo quasi-LPV completo do míssil.

Referências

- Apkarian, P. (2011). Nonsmooth μ synthesis, International Journal of Robust and Nonlinear Control **21**(13): 1493–1508. DOI: [10.1002/rnc.1644](https://doi.org/10.1002/rnc.1644)
- Apkarian, P. and Gahinet, P. (1995). A convex characterization of gain-scheduled H_∞ controllers, Automatic Control, IEEE Transactions on **40**(5): 853–864.
- Apkarian, P. and Noll, D. (2006a). IQC analysis and synthesis via nonsmooth optimization, Systems & Control Letters **55**(12): 971 – 981. DOI: [10.1016/j.sysconle.2006.06.008](https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2006.06.008)
- Apkarian, P. and Noll, D. (2006b). Nonsmooth H_∞ synthesis, Automatic Control, IEEE Transactions on **51**(1): 71–86.
- Bruinsma, N. and Steinbuch, M. (1990). A fast algorithm to compute the H_∞ -norm of a transfer function matrix, Systems & Control Letters **14**(4): 287 – 293. DOI: [10.1016/0167-6911\(90\)90049-Z](https://doi.org/10.1016/0167-6911(90)90049-Z)
- Fan, M. K. H. and Tits, A. L. (1991). Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics, IEEE Transactions on Control Systems Technology **36**: 25–38. DOI: [10.1016/0167-6911\(92\)90044-S](https://doi.org/10.1016/0167-6911(92)90044-S)
- Fan, M. K. H. and Tits, A. L. (1992). A measure of worst-case H_∞ performance and of largest acceptable uncertainty, Systems & Control Letters **18**(6): 409 – 421.
- Kao, C.-Y., Megretski, A. and Jönsson, U. (2004). Specialized fast algorithms for IQC feasibility and optimization problems, Automatica **40**(2): 239 – 252. DOI: [10.1016/j.automatica.2003.09.016](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2003.09.016)
- Ly, J., Safonov, M. and Ahmad, F. (1994). Positive real parrott theorem with application to lmi controller synthesis, American Control Conference, 1994, Vol. 1, pp. 50–52 vol.1.
- Pellanda, P. C. (2001). Commande de systèmes instationnaires: Séquencement de compensateurs et commande lpv, Tese de Doutorado, ENSAE .
- Reichert, R. T. (1992). Dynamic scheduling of modern-robust-control autopilot designs for missiles, IEEE Control Systems Magazine **12**: 35–42. DOI: [10.1109/37.158896](https://doi.org/10.1109/37.158896)
- Shamma, J. S. (1994). Robust stability with time-varying structured uncertainty, IEEE Transactions on Automatic Control **39**: 714–724. DOI: [10.1109/9.286248](https://doi.org/10.1109/9.286248)
- Simões, A., Apkarian, P. and Noll, D. (2009). Nonsmooth multi-objective synthesis with applications, Control Engineering Practice **17**(11): 1338 – 1348. DOI: [10.1016/j.conengprac.2009.06.010](https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2009.06.010)
- Skogestad, S. and Postlethwaite, I. (2005). *Multi-variable Feedback Control: Analysis and Design*, John Wiley & Sons.
- Zhou, K., Doyle, J. C. and Glover, K. (1996). *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632.