

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estudo de estabilidade numérica para a Equação de Korteweg–de Vries usando esquemas de diferenças finitas

Igor Pereira dos Santos Pereira¹

Instituto de Química, UERJ, Rio de Janeiro, RJ

Cristiane Oliveira de Faria²

Instituto de Matemática e Estatística, UERJ, Rio de Janeiro, RJ

1 Introdução

A equação de *Korteweg–de Vries* (KdV) modela fenômenos caracterizados pela propagação de pulsos ondulatórios. Este fenômeno foi inicialmente estudado em longos canais rasos, onde as ondas de água podiam percorrer longas distâncias sem ter sua amplitude alterada. Estas “ondas solitárias”, ou *sólitons*, como ficaram conhecidas, são capazes de interagir entre si de forma não linear e, após a colisão, preservar suas formas originais [1].

A KdV é uma equação diferencial parcial de terceira ordem, não linear, dispersiva, não-dissipativa [2] e homogênea, que pode ser escrita como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

sendo u uma função definida da seguinte maneira

$$u : \begin{array}{ccc} \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto & u(x, t) \end{array} ; u \in \mathcal{C}^3([0, L] \times [0, \infty[).$$

Fisicamente, $u(x, t)$ é o deslocamento vertical do ponto x do domínio da onda no instante de tempo t . O comprimento L representa o tamanho do canal. Além das características da KdV já citadas, a dependência temporal na primeira parcela da equação (1) a classifica também como um problema de evolução.

Neste trabalho, serão propostas algumas abordagens para discretizar, via *métodos de diferenças finitas*, a KdV, considerando o *método de Euler* para a derivada temporal e esquemas centrais para as derivadas espaciais.

¹igorpsp96@gmail.com

²cofaria@ime.uerj.br

2 Metodologia

A construção da malha foi feita de tal forma a manter uniforme os espaçamentos entre dois pontos adjacentes, do domínio Ω , e iguais a Δt e Δx , ao longo do eixo t e x , respectivamente.

É conveniente tratar o termo não-linear na sua forma *conservativa*:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (2)$$

utilizando a *função fluxo* Φ , definida como $\Phi = \frac{u^2}{2}$.

Denotando por \mathbf{u}_i^n o valor da solução numérica avaliada no ponto (x_i, t_n) da malha, isto é, $\mathbf{u}_i^n = \mathbf{u}(x_i, t_n)$, considerando *método de Euler explícito*, tem-se o seguinte esquema para a KdV:

$$\frac{\mathbf{u}_i^n - \mathbf{u}_i^{n-1}}{\Delta t} + \frac{\mathbf{u}_{i+2}^{n-1} - 2\mathbf{u}_{i+1}^{n-1} + 2\mathbf{u}_{i-1}^{n-1} - \mathbf{u}_{i-2}^{n-1}}{2(\Delta x)^3} + \frac{(\mathbf{u}_{i+1}^{n-1})^2 - (\mathbf{u}_{i-1}^{n-1})^2}{4\Delta x} = 0. \quad (3)$$

O erro local de truncamento associado ao esquema apresentado em (3) é da ordem de $O(\Delta t + \Delta x^2)$. A análise de estabilidade e estimativa de erro global na norma ℓ^2 serão apresentados. Essas boas propriedades serão verificadas a partir dos resultados numéricos a serem analisados.

Referências

- [1] C. Constantino, Ondas não-lineares em meio dissipativos descritas pela Equação de Korteweg–de Vries–Burgers. Dissertação de Mestrado em Física, Unicamp, (1979).
- [2] J. Aminuddin, *Numerical Solution of The Korteweg–de Vries Equation*, IJBAS-IJENS, Vol: 11 No: 02, 2011.