Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uma extensão para o teste de Kummer: caracterização da somabilidade de sequências positivas

Wendell Palkovitz de Felice Carrijo[1]
Luiz Otávio Fernandes[2]
Prof. Dr. Douglas Azevedo[3]
Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, Cornélio Procópio, PR

1 Introdução

O Teorema de Kummer (Teste de Kummer)([3]), é um dos resultados de maior importância na teoria de séries infinitas de números reais. Sua importância se dá no fato de que fornece condições necessárias e suficientes para a convergência e divergência de séries de números reais positivos.

Neste trabalho temos o objetivo de apresentar uma extensão para o Teste de Kummer bem como algumas de suas consequências. Em particular, apresentaremos extensões para os testes de D'Lambert, Raabe, Bertrand e Gauss, além de uma versão do Teorema de Olivier.

Teorema [Teste de Kummer]

Considere a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ onde $\{a_n\}$ e uma sequência de números reais positivos.

(i) A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e somente se, existir uma sequência $\{p_n\}$, um número real $c > 0$ e um inteiro $N \geq 1$ tal que

$$p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} \geq c, \; n \geq N.$$

(ii) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge se, e somente se, existir uma sequencia $\{p_n\}$ e um inteiro $N \geq 1$ tal que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ diverge e

$$p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} \leq 0, \; n \geq N.$$

[1]wendellpalkovitz@outlook.com
[2]otavioluiz22@gmail.com
[3]douglasa@utfpr.edu.br

2 Resultados Principais

Nesse trabalho temos por interesse caracterizar a relação entre as sequências de números reais positivos $\{c_n\}$ e $\{a_n\}$ de modo a garantir a convergência e divergência da série $\sum c_n a_n$. Essa caracterização é obtida por meio de uma extensão que obtemos do teste de Kummer, a qual é enunciada a seguir.

Teorema [Extensão do Teste de Kummer]
Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ com $\{a_n\}$ $\{c_n\}$ sequência de termos positivos.

(i) A série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ converge se, e somente se, existir uma sequência $\{p_n\}$ de números reais positivos e um inteiro positivo $N \geq 1$ tal que

$$p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} \geq c_{n+1},\ n \geq N.$$

$(ii-a)$ Suponha que exista uma sequência $\{p_n\}$ e um inteiro positivo N tal que

$$p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} \leq -c_{n+1},\ n \geq N$$

com $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ sendo uma série divergente. Então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}(p_n - c_n)a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} p_n a_n$ diverge. Se além disso $\lim \frac{c_n}{p_n} \neq 0$ então $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ diverge.

$(ii-b)$ Suponha que ambas as séries $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. Além disso, suponha que para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $r \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_m + ... + a_r \geq c_m a_m + ... + c_r a_r.$$

Então, existe uma sequência $\{p_n\}$ e um inteiro positivo $N \geq 1$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ diverge

$$p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} \leq -c_{n+1},\ n \geq N.$$

Agradecimentos

Agradecemos ao DAMAT-CP e a Fundação Araucária pelo apoio e financiamento.

Referências

[1] D. Azevedo, Extension of Kummer's test: Summability characterizations of positive sequences, preprint, (2017)

[2] K. Knopp, Theory and application of infinite series, Blackie & Son Limited, London and Glascow, 1954.

[3] J. Tong, Kummer's Test Gives Characterizations for Convergence or Divergence of all Positive Series,The American Mathematical Monthly, Vol. 101, No. 5 (1994), 450-452.
219