

Utilização dos Multiplicadores de Lagrange para Otimização da Massa de Foguetes

Bruno Melniski de Sousa¹

Departamento de Ciências Básicas e Ambientais, EEL/USP, Lorena, SP

Roberta Veloso Garcia²

Departamento de Ciências Básicas e Ambientais, EEL/USP, Lorena, SP

1 Introdução

Este projeto visa introduzir os Multiplicadores de Lagrange no problema de otimização da massa de um foguete para um lançamento em nível de máximo aproveitamento, independente da missão estipulada [1]. A eficiência da pesquisa faz com que o foguete alcance maiores altitudes com a maior velocidade e carga útil exequíveis. Para isso, foi-se pensado na criação de um foguete com diversos estágios, que para melhor entendimento, pode-se fazer uma analogia com diversos foguetes acoplados uns aos outros verticalmente, corroborando entre si, fornecendo propulsão ao estágio de cima e liberando carga desnecessária assim que o combustível de cada estágio é queimado. A adversidade deste projeto é saber até que ponto é vantajoso adicionar estágios minimizando a massa total e ainda conseguindo alcançar a altitude e velocidade desejadas.

2 Aplicação do método dos Multiplicadores de Lagrange no Problema da Otimização

O método dos multiplicadores de Lagrange gira em torno da tese de que é possível encontrar extremos de uma função de n variáveis se, e somente se, essas variáveis estiverem sujeitas a m restrições [2]. Além disso, tanto as funções quanto as restrições devem possuir derivadas contínuas. Assim, conhecendo as funções que se deseja otimizar e suas respectivas restrições, pode-se chegar na seguinte equação para encontrar seus máximos e mínimos [2]:

$$\nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

¹bruno.melniski.sousa@usp.br

²robertagarcia@usp.br

onde λ são os multiplicadores de Lagrange. Neste trabalho, a equação a ser otimizada é a soma das massas dos estágios do foguete e a restrição é definida a partir da velocidade final do foguete, dadas respectivamente por [3]

$$f(m_1, m_2, \dots, m_j) = m_1 + m_2 + m_j \quad (2)$$

$$g(m_1, m_2, \dots, m_j) = \Delta V - c \sum_{i=1}^j \ln \left(\frac{m_i + m_{i+1} + m_{i+2} + \dots + m_j + m_c}{S m_i + m_{i+1} + m_{i+2} + \dots + m_j + m_c} \right) = 0 \quad (3)$$

sendo ΔV a velocidade final que se deseja atingir, S o fator estrutural, m_c o valor da carga útil, j o número de estágios e c a velocidade dos gases expelidos.

A solução do sistema de equações formados por 1 e 3 é dada por [?]

$$\lambda = \frac{1}{c} \left(S_i e^{\Delta V/jc} - 1 \right)^{-1} \quad (4)$$

$$m_0 = \left[e^{\Delta V/jc} \left(\frac{1 - S}{1 - S e^{\Delta V/jc}} \right)^j - 1 \right] m_c \quad (5)$$

sendo m_0 a massa total do foguete composto por todos os estágios. Considerando um foguete numa altitude de 160 km em uma órbita circular ao redor da Terra com $S = 0,2$ e $c = 2,6667$ km/s podemos calcular a velocidade atingida e m_0 para um foguete de 1, 2 e 3 estágios. No caso do foguete de 1 estágio, teremos $m_0 = -6.45m_c$. Para 2 estágios: $m_0 = 655.40m_c$ e no caso de um foguete de 3 estágios: $m_0 = 91.76m_c$.

3 Conclusões

Nota-se que a massa de um foguete de 2 estágios é cerca de 655 vezes a massa da carga útil, enquanto para 3 estágios a massa do foguete é aproximadamente 92 vezes. Neste caso, existe a vantagem do acréscimo de um estágio, visto o decréscimo substancial da massa do foguete.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Programa Unificado de Bolsas de Estudo para Estudantes de Graduação da Universidade de São Paulo.

References

- [1] J. Stewart. *Cálculo*. Vol. II, Cengage Learning, São Paulo 2013.
- [2] I. B. Vapnyarskii. *Lagrange multipliers*. Encyclopedia of Mathematics, ISBN 978-1-55608-010-4, 2001.
- [3] W. E. Wiesel. *Spaceflight Dynamics*. ISBN 978-1-4528795-9-8, 2010.