Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

---

# Problemas de minimização: aplicação em funções quadráticas

Glaucia Franciele Ruiz Isidoro[1]
Elenice Weber Stiegelmeier[2]
Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, Cornélio Procópio, PR

## 1 Introdução

Otimização refere-se ao estudo de problemas que buscam otimizar alguma variável através de uma escolha sistemática. Desta maneira, otimizar significa encontrar a melhor maneira de fazer algo, dada uma medida do que é ser melhor.

Neste trabalho será abordado problemas de minimização onde todas as funções usadas para defini-los são funções não lineares. O caso particular abordado é o problema irrestrito. E ainda, serão apresentadas as condições de otimalidade e um problema de aplicação considerando funções quadráticas.

De forma geral, os problemas de minimização consistem em encontrar pontos de mínimo de uma função sobre um conjunto de restrições. No presente trabalho será considerado o problema de minimização irrestrita expresso por:

$$\min f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, chamada de funcional objetivo.

**Definição 1.1.** *Seja o conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$. Um ponto $x^* \in D$ é um minimizador global de* (1)*, se*

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall\, x \in D. \tag{2}$$

Para se determinar o minimizador global de (1) a condição (2) deve ser satisfeita, porém, muitas vezes, se tem apenas o conhecimento local de $f$, então, o conjunto de soluções viáveis fica restrito a uma vizinhança de $x^*$ e, com isso, obtêm-se apenas minimizadores locais de $f$. No caso da minimização de funções algumas condições devem ser satisfeitas. Condições estas chamadas de condições necessárias de otimalidade.

**Teorema 1.1.** (***Condição necessária de primeira ordem***) *Considere a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável no ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$. Se $x^*$ é um minimizador local irrestrito de $f$, então*

$$\nabla f(x^*) = 0. \tag{3}$$

[1]glauciaisidoro@alunos.utfpr.edu.br
[2]elenicew@uftpr.edu.br

 

**Teorema 1.2.** (***Condição necessária de segunda ordem***) *Considere que a função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ seja duas vezes diferenciável. Se $x^*$ é um minimizador local irrestrito de $f$, então vale (3) e a matriz Hessiana de $f$ no ponto $x^*$ é semi-definida positiva, isto é,*

$$x^T \nabla^2 f(x) x \quad \geq \quad 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{4}$$

**Teorema 1.3.** (***Condição suficiente de segunda ordem***) *Considere que a função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ seja duas vezes diferenciável na vizinhança aberta de $x^*$. Se $x^*$ é um ponto estacionário da função $f$ e $\nabla^2 f(x^*)$ é definida positiva, então $x^*$ é minimizador local estrito de $f$.*

## 2 Aplicação: Funções quadráticas

Para exemplificar o uso das condições de otimalidade será considerado um problema de minimização de funções quadráticas.

**Definição 2.1.** *Considere $A_{nxn}(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica, $b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$. Define-se função quadrática $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$.*

**Aplicação:** Minimizar a função quadrática $f(x) = x^T Ax + b^T x$ com

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

**Solução:** Verificar se $A$ é definida positiva (Teorema 1.3). Calculando os menores principais da matriz $A$, tem-se: $A_1 = 6 > 0$, $A_2 = 11 > 0$, $A_3 = 42 > 0$, como, $A_i > 0$, então, $A$ é definida positiva [2]. Pelo Teorema 1.1, $\nabla f(x^*) = 0$, então,

$$f(x) = x^T Ax + b^T x \Leftrightarrow (Ax^2 + bx)$$

$$\nabla f(x) = 2Ax + b = 0$$

Isolando $x$, obtêm-se $x^* = -\frac{1}{2}A^{-1}b$, o qual corresponde ao ponto que minimiza $f(x)$.

## 3 Considerações finais

Portanto, este trabalho apresenta as condições de otimalidade para problemas de minimização irrestrita e uma aplicação com funções quadráticas. Como continuidade deste trabalho, pretende-se aprofundar o estudo dos problemas de minimização de funções quadráticas e utilizar métodos numéricos para a obtenção da solução.

## Referências

[1] A. Izmailov, M. Solodov, Otimização: condições de otimalidade, elementos de análise convexa e dualidade, v.1, IMPA, Rio de Janeiro, (2005).

[2] G. Iezzi, C. Murakami, N. J. Machado, Fundamentos de matemática elementar, Atual, São Paulo, (2005).